УДК 621.224

*А. В. РУСАНОВ, Ю. А. БЫКОВ*

# НЕЯВНЫЙ ЧИСЛЕННЫЙ МЕТОД ДЛЯ МОДЕЛИРОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНОГО НЕСЖИМАЕМОГО ТЕЧЕНИЯ ЖИДКОСТИ

Представлений неявний чисельний метод для моделювання тривимірних нестаціонарних нестисливих течій рідини в проточних частинах гідромашин. Метод заснований на застосуванні концепції штучної стисливості з додатковими ітераціями на кожному часовому кроці. Різницева схема має другий порядок апроксимації по просторовим координатам і часу. Представлені результати моделювання одновимірної нестаціонарної течії, для якої є аналітичне рішення. Проведений аналіз даних чисельного моделювання демонструє можливість використання запропонованого методу для розрахунку нестаціонарних течій у проточних частинах гідромашин.

**Ключові слова:** чисельне моделювання, математична модель, штучна стиливість, нестислива рідина, нестаціонарна течія, розрахункові сітки.

Представлен неявный численный метод для моделирования трехмерных нестационарных несжимаемых течений жидкости в проточных частях гидромашин. Метод основан на применении концепции искусственной сжимаемости с дополнительными итерациями на каждом временном шаге. Разностная схема имеет второй порядок аппроксимации по пространственным координатам и времени. Представлены результаты моделирования одномерного нестационарного течения, для которого имеется аналитическое решение. Проведенный анализ данных численного моделирования демонстрирует возможность использования предложенного метода для расчета нестационарных течений в проточных частях гидромашин.

**Ключевые слова:** численное моделирование, математическая модель, искусственная сжимаемость, несжимаемая жидкость, нестационарное течение, расчетные сетки.

An implicit numerical method for simulating three-dimensional unsteady incompressible fluid flows in hydraulic machines flow parts of is presented. The method is based on the exploitation of the concept of artificial compressibility with additional iterations at each time step. The difference scheme has the second order approximation for spatial coordinates and time. The presented numerical method is integrated into the software package IPMFlow, which developed for numerical simulation of three-dimensional viscous flows in flow parts of turbomachines of various types. The simulation results of a one-dimensional unsteady fluid flow in a channel for which there is an analytical solution are presented. The obtained results of numerical simulation are in good agreement with the data of the analytical solution. The analysis of numerical simulation data demonstrates the possibility of using the proposed method for calculating unsteady flows in hydraulic machines flow parts.

**Keywords**: numerical simulation, mathematic modeling, artificial viscosity, incompressible fluid, unsteady flows, computing meshes.

**Введение.** При работе на нерасчетных режимах в радиально-осевых и поворотно-лопастных гидротурбинах появляются низкочастотные гидродинамические пульсации, обусловленные нестационарным характером поведения закрученного потока. Величина пульсаций давления достигает десяти процентов располагаемого напора водяного столба, что для высоконапорных агрегатов может приводить к повреждению конструкции [1]. Также при работе обратимых гидротурбин в насосном режиме при малых открытиях направляющего аппарата возникают значительные динамические нагрузки на лопатки НА. Поскольку исследование условий возникновения и уровня вибраций в реальных агрегатах затруднено и аварийноопасно, необходимо проводить теоретическую оценку параметров нестационарного течения жидкости, в том числе частот и амплитуд гидродинамических нагрузок. В реальных условиях нестационарное поведение потока осложняется явлениями кавитации, гидроакустики и др., которые зависят, в том числе, и от масштабов модели исследуемой проточной части. Поэтому для более полного учета всевозможных особенностей течения актуально использование современных численных методов моделирования нестационарного потока жидкости.

В Институте проблем машиностроения НАН Украины создан программный комплекс *IPMFlow*, предназначенный для численного моделирования трехмерных вязких течений в проточных частях турбомашин различных типов. Этот комплекс разработан на базе существующих программных комплексов *FlowER* [2] *FlowER-U* [3]. В настоящее время *IPMFlow* позволяет моделировать только стационарные течения несжимаемой жидкости [4].

Основная сложность численного решения нестационарных несжимаемых уравнений Навье-Стокса возникает из-за уравнения неразрывности, в котором отсутствует слагаемое с производной по времени, что не позволяет применять традиционные методы интегрирования по времени. Наиболее распространенным подходом к решению нестационарных несжимаемых уравнений Навье-Стокса является введение в уравнение неразрывности производной по времени – искусственной сжимаемости. Этот метод впервые был использован Чориным [5] для получения стационарных решений. Чтобы получить решение по времени, в уравнения сохранения массы и импульса вводятся дополнительные производные по псевдовремени, и модифицированная система интегрируется по времени в два этапа – шаг по реальному времени и несколько шагов по псевдовремени, проводимых до достижения критерия сходимости. Методы искусственной сжимаемости с двойным интегрированием по времени использовались многими авторами для исследования нестационарных течений [6, 7].

В данной работы представлен один из возможных вариантов реализации метода двойного шага по времени при решении нестационарной задачи течения несжимаемой жидкости.

**Численный метод.** Для простоты будем рассматривать одномерные уравнения Эйлера нестационарного течения несжимаемой жидкости. При использовании метода искусственной сжимаемости и концепции псевдовремени их можно записать в виде [8]:

$$R_\tau \frac{\partial Q}{\partial \tau} + R_t \frac{\partial Q}{\partial t} + \frac{\partial E}{\partial x} = 0\,, \qquad (1)$$

$$Q = \begin{pmatrix} P \\ u \end{pmatrix},\; E = \begin{pmatrix} u \\ u^2 + P \end{pmatrix},\; R_\tau = \begin{pmatrix} \beta^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},\; R_t = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

где $u$ – скорость;

$P = \dfrac{p}{\rho_*}$ – кинематическое давление;

$p$ – статическое давление;

$\rho_*$ – плотность жидкости;

$\beta$ − коэффициент искусственной сжимаемости;

$\tau$ – псевдовремя.

При использовании трехслойной схемы дифференцирования по времени второго порядка, разностная аппроксимация величины $Q$ примет вид:

$$\frac{\partial Q}{\partial t} \approx \frac{3\Delta Q^{n+1} - \Delta Q^n}{2\Delta t}\,,$$

где $\Delta Q^n = Q^n - Q^{n-1}$ – приращение величин на $n$–м шаге по времени.

Рассмотрим поочередно интегрирование уравнений (1) по времени $t$ и по псевдовремени $\tau$. При интегрировании по времени $t$ неявная процедура расчета приращений $\Delta Q^{n+1}$ будет иметь вид [8]:

$$\left( I + \frac{2}{3}\Delta t \frac{\partial A^{n+1}}{\partial x} \right) \Delta Q^{n+1} = \frac{1}{3}\Delta Q^n - \frac{2\Delta t}{3}\frac{\partial E^{n+1}}{\partial x} \qquad (2)$$

Здесь $A$ – матрица Якоби, $A = \dfrac{\partial E}{\partial Q}$. В уравнении (2) отсутствуют множители $R_\tau$ и $R_t$, поскольку считаем, что обеспечивается условие $\dfrac{\partial P}{\partial t} = -\dfrac{\partial u}{\partial x} = 0$

Для приращения $Q$ по псевдовремени $\tau$ можно записать:

$$\frac{\partial Q}{\partial \tau} \approx \frac{Q^{n+1,k+1} - Q^{n+1,k}}{\Delta \tau}\,,$$

где $k$ – индекс шага по псевдовремени. Примем, что

$$\Delta Q^{n+1} = Q^{n+1,k+1} - Q^{n+1,k} + Q^{n+1,k} - Q^n\,,$$

$$\Delta Q^{n+1,k+1} = Q^{n+1,k+1} - Q^{n+1,k}$$

Тогда неявная процедура для шага по псевдовремени будет выглядеть:

$$\begin{gathered} \left( IR_\tau + \Delta\tau \frac{\partial A^{n+1,k}}{\partial x} \right) \Delta Q^{n+1,k+1} = \\ - R_t \left( \left( Q^{n+1,k} - Q^n \right) - \frac{1}{3}\Delta Q^n \right) - \Delta\tau \frac{\partial E^{n+1,k}}{\partial x} \end{gathered} \qquad (3)$$

Принимая в (3) $\Delta\tau = \dfrac{2}{3}\Delta t$ и $\beta = 1$, получаем:

$$\begin{gathered} \left( I + \frac{2}{3}\Delta t \frac{\partial A^{n+1,k}}{\partial x} \right) \Delta Q^{n+1,k+1} = \\ - R_t \left( \left( Q^{n+1,k} - Q^n \right) - \frac{1}{3}\Delta Q^n \right) - \frac{2}{3}\Delta t \frac{\partial E^{n+1,k}}{\partial x} \end{gathered} \qquad (4)$$

Таким образом, неявная процедура для шага по времени (2) и шага по псевдовремени (4) аналогичны, за исключением слагаемого в правой части. Это позволяет без значительного изменения существующего алгоритма добавить в процедуру интегрирования по времени дополнительные подытерации, которые формируют бездивиргентное поле скоростей на каждом временном шаге.

**Тестирование метода.** Для тестирования метода была выбрана задача об одномерном течении невязкой несжимаемой жидкости с изменяющимся по времени давлением на выходе. Эта задача использовалась для верификации метода и другими авторами [5]. Моделирование выполнялось в трехмерной постановке на сетке размером 6×6×36. Протяженность расчетной области по координате $x$ составляла $L$ = 0,1, по координатам $y$ и $z$ была одинакова и равна 0,006. На рис. 1 приведен общий вид расчетной сетки.

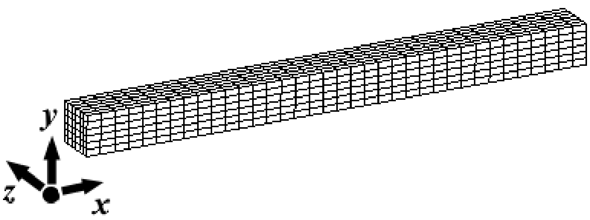


Рис. 1 − Вид расчетной сетки в канале

На границах в направлениях $y$ и $z$ ставились условия периодичности. На входе (при $x = 0$) задавалось постоянное полное давление, на выходе (при $x = L$) устанавливалось статическое давление, равное:

$$P_{\text{выход}} = P_0 + P_e \sin\omega t$$

Были заданы следующие параметры: $P_0 = 1$, $P_e = 0{,}1$, $\omega = 100$. При выбранных значениях, когда амплитуда колебаний давления достаточно мала, существует точное аналитическое решение:

$$u(t) = u_0 - \frac{P_e}{u_0\left(1 + \Omega^2\right)} \left( \sin\omega t - \Omega\cos\omega t + \Omega e^{-\frac{u_0}{L}t} \right)$$

$$P(x,t) = P_0 + P_e \sin\omega t +$$
$$+ (x - L)\frac{P_e\omega}{u_0\left(1+\Omega^2\right)}\left(\cos\omega t + \Omega\sin\omega t - e^{-\frac{u_0}{L}t}\right),$$

где $\Omega = \dfrac{L\omega}{u_0}$ − изменённая частота колебаний, $u_0 = 1$.

Моделирование проводилось с помощью неявного метода, шаг по времени был выбран таким, чтобы на каждый период колебаний приходилось 30 шагов:

$$\Delta t = \frac{2\pi}{30\omega}.$$

Коэффициент сжимаемости принимал значение $\beta = 100$, количество подытераций составляло 20. В качестве начального условия использовано аналитическое решение при $t = 0$.

На рис. 2 и рис. 3 представлены результаты численного моделирования на отрезке времени первых 10 колебаний. На рис. 2 показаны значения расчетного и точного давлений в точке $x = 0$, которая соответствует входному сечению канала. Квадратиками показаны значения точного аналитического решения, сплошной линией – значения, значения, полученные в результате численного моделирования. Показанные численные результаты достаточно удовлетворительно согласуются с аналитическим решением.

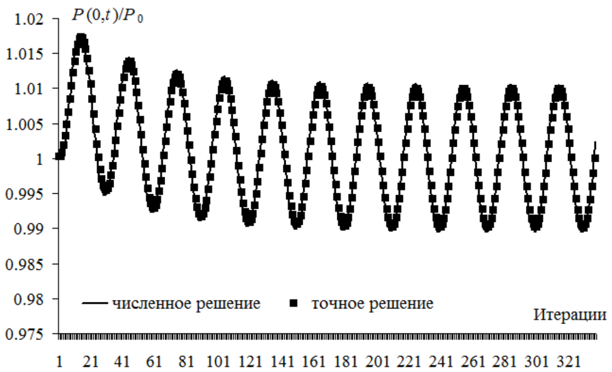


Рис. 2 − Давление на входе в канал по итерациям

На рис. 3 показаны значения рассчитанной и точной скорости в точке $x = 0$. Отображенные численные результаты моделирования скорости также достаточно хорошо согласуются с аналитическим решением.


Рис. 3 − Скорость на входе в канал по итерациям

Из представленных графиков видно, что решение экспоненциально приближается к простым гармоническим колебаниям, практически не меняясь уже после 6-го колебания. Численные результаты достаточно хорошо согласуются с точным решением, средняя ошибка для значений давления и скорости не превышает $10^{-3}$.

**Выводы.** Метод искусственной сжимаемости, дополненный подытерациями по псевдовремени, позволяет моделировать с удовлетворительной точностью нестационарные течения несжимаемой жидкости, требуя при этом небольшое количество дополнительных шагов. Предложенная модификация метода, которая использует одинаковую неявную процедуру для шагов по времени и псевдовремени, достаточно проста для реализации. Внесенные изменения не повлияли на погрешность получаемого решения, что показано на простом примере нестационарного течения в канале. Возможные проблемы со сходимостью на временном шаге могут быть решены подбором значений коэффициента сжимаемости и временным шагом на подытерациях. В дальнейшем предполагается выполнить дополнительные исследования нестационарных течений в проточных частях гидромашин.

### Список литературы

1. *Dorfler P.* Flow-Induced Pulsation and Vibration in Hydroelectric Machinery / *P. Dorfler, M. Sick, A. Coutu.* – London : Springer, 2013. – 242 p.
2. *Русанов А. В.* Математическое моделирование нестационарных газодинамических процессов в проточных частях турбомашин: монография / *А. В. Русанов, С. В. Ершов.* – Харьков : ИПМаш НАН Украины, 2008. – 275 с.
3. *Русанов А. В.* Численное моделирование течений вязкой несжимаемой жидкости с использованием неявной квазимонотонной схемы Годунова повышенной точности / *А. В. Русанов, Д. Ю. Косьянов* // Восточ.-Европ. журн. передовых технологий. − 2009. − № 5. − С. 4−7.
4. *Русанов А. В.* Расчетное исследование пространственного вязкого течения жидкости в отсасывающей трубе осевой гидротурбины / *А. В. Русанов, Ю. В. Городецкий, Д. Ю. Косьянов [и др.]* // Пробл. машиностроения. − 2011. − Т. 14, № 4. − С. 16−24.
5. *Chorin A. J.* A numerical method for solving incompressible viscous flow problem // J. Comput. Phys. − 1967. − № 2. − P. 12–26.
6. *Roger S. E.* An upwind differencing scheme for the time-accurate incompressible Navier–Stokes equations / *S. E. Roger, D. Kwak* // AIAA J. – 1990. – Vol. 28, № 2. – P. 253 –262.
7. *Shaha A.* Numerical solution of unsteady Navier–Stokes equations on curvilinear meshes / *A. Shaha, L. Yuanb, S. Islam* // Computers & Mathematics with Applications. – 2012. – Vol. 63, № 11. – P. 1548–1556.
8. *Черный С. Г.* Численное моделирование течений в турбомашинах / *С. Г. Черный, Д. В. Чирков, В. Н. Лапин [и др.]* – Новосибирск : Наука, 2006. - 202 с.

### References (transliterated)

1. Dorfler, P., M Sick, and A Coutu. *Flow-Induced Pulsation and Vibration in Hydroelectric Machinery*. London: Springer, 2013. Print.
2. Rusanov, A. V and S. V. Ershov *Matematicheskoe modelirovanie nestatsionarnykh gazodinamicheskikh protsessov v protochnykh chastyakh turbomashi*. Kharkov: IPMach NASU, 2008. Print.
3. Rusanov, A. V. and D. Yu Kos'yanov. "Chislennoe modelirovanie techeniy vyazkoy neszhimaemoy zhidkosti s ispol'zovaniem neyavnoy kvazimonotonnoy skhemy Godunova povyshennoy tochnosti." *Vostoch.-Evrop. zhurn. peredovykh tekhnologiy* 5 (2009): 4−7. Print.

4. Rusanov, A. V., et al. "Raschetnoe issledovanie prostranstvennogo vyazkogo techeniya zhidkosti v otsasyvayushchey trube osevoy gidroturbiny." *Probl. mashinostroeniya*. No 14.4, 2011, 16−24. Print.
5. Chorin, A. J. "A numerical method for solving incompressible viscous flow problem." *J. Comput. Phys* 2 (1967): 12–26. Print.
6. Roger, S. E and D Kwak "An upwind differencing scheme for the time-accurate incompressible Navier–Stokes equations." *AIAA J.* 28.2 (1990): 253 – 262. Print.
7. Shaha, A., L. Yuanb and S Islam "Numerical solution of unsteady Navier–Stokes equations on curvilinear meshes." *Computers & Mathematics with Applications*. No 63.11. 2012. 1548–1556. Print.
8. Chernyy, S. G., D. V. Chirkov and V. N. Lapin *Chislennoe modelirovanie techeniy v turbomashinakh*. Novosibirsk: Nauka, 2006. Print.

*Поступила (received) 14.07.2017*

*Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions*

**Неявний чисельний метод для моделювання нестаціонарної нестисливої течії рідини / А. В. Русанов, Ю. А. Биков** // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Гідравлічні машини та гідроагрегати. – Х. : НТУ «ХПІ», 2017. – № 42 (1264). – С. 3–6. – Бібліогр.: 8 назв. – ISSN 2411-3441.

**Неявный численный метод для моделирования нестационарного несжимаемого течения жидкости / А. В. Русанов, Ю. А. Быков** // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Гідравлічні машини та гідроагрегати. – Х. : НТУ «ХПІ», 2017. – № 42 (1264). – С. 3–6. – Библиогр.: 8 назв. – ISSN 2411-3441.

**An implicit numerical method for unsteady incompressible fluid flow simulation / A. V. Rusanov, Yu. A. Bykov** // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Hydraulic machines and hydrounits. – Kharkov : NTU "KhPI", 2017. – No. 42 (1264). – P. 3–6. – Bibliogr.: 8. – ISSN 2411-3441.

*Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors*

***Русанов Андрій Вікторович*** **–** член-кореспондент НАН України, доктор технічних наук, професор, директор ІПМаш НАН України, м. Харків; тел.: (057) 349-47-95; e-mail: rusanov@ipmach.kharkov.ua.

***Русанов Андрей Викторович*** **–** член-корреспондент НАН Украины, доктор технических наук, профессор, директор ИПМаш НАН Украины, г. Харьков; тел.: (057) 349-47-95; e-mail: rusanov@ipmach.kharkov.ua.

***Rusanov Andrey Viktorovich*** – Corresponding Member of the NAS of Ukraine, Doctor of Technical Sciences, Full Professor, Director of IPMach NAS of Ukraine, Kharkov; tel.: (057) 349-47-95; e-mail: rusanov@ipmach.kharkov.ua.

***Биков Юрій Адольфович*** – кандидат технічних наук, науковий співробітник ІПМаш НАН України, м. Харків; тел.: (057) 349-47-76; e-mail: bykow@ipmach.kharkov.ua.

***Быков Юрий Адольфович*** – кандидат технических наук, научный сотрудник ИПМаш НАН Украины, г. Харков; тел.: (057) 349-47-76; e-mail: bykow@ipmach.kharkov.ua.

***Bykov Yuriy Adol'fovich*** – Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Research Officer in IPMach NAS of Ukraine, Kharkov; tel.: (057) 349-47-76; e-mail: bykow@ipmach.kharkov.ua.