УДК 621.224

О. В. ПОТЕТЕНКО, Л. К. ЯКОВЛЕВА, САМБА БИТОРИ ТРЕЗОР ДЕС БЕКЕТ

К ВОПРОСУ СОВЕРШЕНСТВОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКОГО ОПИСАНИЯ ТУРБУЛЕНТНОГО ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ

Проведено аналіз можливості практичного застосування, переваг і недоліків різних моделей турбулентності, починаючи з напівемпіричних «*k*», «*k*-ε» моделей і моделей, що описуються диференціальними рівняннями для напруг Рейнольдса. Запропоновано новий підхід до опису турбулентних потоків, які враховують більш точно дифузний перенесення імпульсу, а також трансформацію енергії імпульсу в енергію моменту імпульсу і навпаки та інші моменти.

Ключові слова: турбулентність, дифузійний перенос, імпульс, момент імпульсу, конвективний перенос, генерація, дисипація, трансформація енергії імпульсу.

Проведен анализ возможности практического применения, преимуществ и недостатков различных моделей турбулентности, начиная с полуэмпирических «*k*», «*k*-ε» моделей и моделей, описываемых дифференциальными уравнениями для напряжений Рейнольдса. Предложен новый подход к описанию турбулентных потоков, учитывающих более точно диффузионный перенос импульса, а также трансформацию энергии импульса в энергию момента импульса и наоборот и другие моменты.

Ключевые слова: турбулентность, диффузионный перенос, импульс, момент импульса, конвективный перенос, генерация, диссипация, трансформация энергии импульса.

The feasibility, advantages and disadvantages of various turbulence models have been analyzed, starting with semi-empirical «*k*», «*k*-ε» models and models described by differential equations for the Reynolds stresses. A new approach to the description of turbulent flows, taking into account more accurately the diffusion transfer of the momentum of particles, as well as the transformation of the moment of momentum energy into the momentum energy and vice versa, and other moments are proposed. It is in-process shown that the tensor of turbulent tensions in equalization of Reynolds full not enough describes the diffusive transfer of impulse. It is shown also, that the models of turbulence are based on «*k*» and «*k*-ε» equations can not exactly describe anisotropic character of large scale vertical structures. The lacks of the most modern method of description of turbulent streams are considered also based on equalizations of indissolubility, Reynolds and differential equalizations for tensions of Reynolds. New model of description of turbulent tensions and system of equalizations, describing the not only конвективный but also diffusive transfer of momentum, moment of momentum and vice versa.

Keywords: turbulence, diffusive transfer, momentum, moment of momentum, convective transfer, generation, dissipation, transformation the momentum energy.

Введение. Бурное развитие авиации, космонавтики, морского надводного и подводного кораблестроения, энергетического машиностроения (паро- и газотурбостроения, гидротурбостроения и др.) привело к развитию новых методов математического описания турбулентных потоков. Этому процессу способствовало возникновение современных компьютерных технологий, осуществляющих математическое моделирование рабочих процессов и сложных турбулентных потоков.

Кафедра «Гидравлические машины» им Г. Ф. Проскуры Национального технического университета «Харьковский политехнический институт» (НТУ «ХПИ»), организованная в 1914 году, была первой на Украине кафедрой, начавшей подготовку специалистов в области гидромашиностроения и авиации. В 1953 г. решением правительства было начато производство гидротурбин на Харьковском Турбогенераторном заводе (ХТГЗ) в настоящее время ПАО «Турбоатом».

В XIX и начале XX века гидромеханиками различных стран для решения задачи расчета потока, обтекающего профиль крыла самолета, лопасти паровой, газовой, гидравлической турбины было выбрано два направления: 1. Разработка полуэмпирических моделей турбулентности замыкающих систему уравнений Рейнольдса и неразрывности для простейших случаев движения жидкости. 2. Разработка теории пограничного слоя, которая применительно к потоку в межлопастных каналах турбомашин вылилась в так называемую двухслойную модель, состоящую из ядра потока (невязкая жидкость) и пристеночного пограничного слоя, где учитывалась и вязкость, и турбулентность потока.

1. Основные полуэмпирические модели турбулентности.

1.1. Гипотеза Буссинеска (1897 г.) – модели, основанные на понятии «эффективной вязкости». Предполагая, что напряжение Рейнольдса (турбулентные напряжения) должны быть выражены через осредненные параметры потока предлагается:

$$\tau_{ij}^{(m)} = -\rho\overline{V_i' V_j'} - \rho\Phi_{ij}\left(\overline{V}_i, \overline{V}_j, \frac{\partial\overline{V}_i}{\partial x_i}, \frac{\partial\overline{V}_i}{\partial x_j}, \frac{\partial\overline{V}_j}{\partial x_i}, \frac{\partial\overline{V}_j}{\partial x_j}, ..\right) \quad (1)$$

и задача определения компонент $\tau_{ij}^{(m)}$ сводится к определению Φ_{ij}, что не упрощает задачу и единственный путь – это упрощение самой функции Φ_{ij}.

Для наиболее простых потоков, следуя идеи Ньютона о внутреннем трении в жидкости, предполагается, что и турбулентные напряжения, подобно напряжениям обусловленным вязкостью жидкости, пропорциональны градиенту скорости угловой деформации жидкого элемента в осредненном движении:

$$\Phi_{ij} = -\nu_{ij}^{(m)}\left(\frac{\partial \overline{V}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{V}_j}{\partial x_i}\right) \qquad (2),$$

где $\nu_{ij}^{(m)}$ – некоторый коэффициент пропорциональности не имеющий физического смысла.

В этом случае получим:

$$\tau_{ij}^{(m)} = -\rho\overline{V_i^{'}V_j^{'}} = \rho\nu_{ij}^{(m)}\left(\frac{\partial \overline{V}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{V}_j}{\partial x_i}\right) = \mu_{ij}^{(m)}\left(\frac{\partial \overline{V}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{V}_j}{\partial x_i}\right) \qquad (3)$$

или окончательно

$$\begin{aligned}\tau_{ij} = \tau_{ij}^{(в)} + \tau_{ij}^{(m)} = \left(\mu_{вязк} + \mu_{ij}^{(m)}\right)\left(\frac{\partial \overline{V}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{V}_j}{\partial x_i}\right) = \\ = \mu'\left(\frac{\partial \overline{V}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{V}_j}{\partial x_i}\right)\end{aligned} . \qquad (4)$$

Коэффициент $\mu' = \mu_{вязк} + \mu_{ij}^{(m)}$ обычно называют коэффициентом «эффективной вязкости» и естественно считать $\mu_{ij}^{(m)} = \mathrm{const}$.

Для наиболее простых потоков, например, турбулентное движение жидкости вблизи плоской стенки были получены экспериментальные зависимости $\mu^{(m)}$ от расстояния до твердой поверхности, однако для более сложных случаев гипотеза Буссинеска «эффективной вязкости» не нашла широкого применения.

Для нормальных и касательных напряжений формула Буссинеска в общем виде записывается, как:

$$-\rho\overline{V_i^{'}V_j^{'}} = \mu^{(m)}\left(\frac{\partial \overline{V}_i}{\partial x_j} + \frac{\partial \overline{V}_j}{\partial x_i}\right) - \frac{2}{3}\rho k\delta_{ij} \qquad (5)$$

или в «индексной» форме записи:

$$-\rho\overline{V_i^{'}V_j^{'}} = \mu^{(m)}\left(\overline{V}_{i,j} + \overline{V}_{j,i}\right) - \frac{2}{3}\rho k\delta_{ij} \qquad (5')，$$

где $k = \frac{1}{2}\overline{V_i^{'}V_i^{'}}$ – энергия пульсаций скорости (повторяющийся индекс «*i*» означает суммирование (*i*=1, 2, 3) по этому индексу по правилу Эйнштейна.

$$\mu^{(m)} = \rho\nu^{(m)};\ \nu^{(m)} \sim \hat{V}\,L \qquad (6),$$

где ~ – знак пропорциональности, $\hat{V}$ – масштаб скорости; L – масштаб длины; δ_{ij} – символ Кронекера: $\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j \\ 0 \text{ при } i \neq j \end{cases}$.

1.2. Гипотеза Прандтля – модели турбулентности, основанные на понятии «пути перемешивания» Прандтля. В ряде полуэмпирических теорий турбулентности основную роль играет понятие «пути перемешивания» введенное Прандтлем в 1925 г. В слегка отличной форме эта идея высказывалась Тейлором в 1915 г.

В основу полуэмпирической теории турбулентности Прандтль положил известную теорию переноса импульса, разработанную им в 1925 г. предполагающую, что для продольной компоненты импульса $\rho V_x^{'}$ существует определенный «путь перемешивания» $l^{'}$, и следовательно:

$$\tau^{(m)} = -\rho\overline{V_x^{'}V_z^{'}} = \rho\overline{l^{'}V_z^{'}}\,\overline{V_{x,z}^{'}}\text{, т.е. } \nu^{(m)} = \overline{l^{'}V_z^{'}} \qquad (7).$$

Длина $l^{'}$ здесь, в известном смысле, аналогична длине свободного пробега молекул в кинетической теории газов – она определяет путь, который проходит небольшой элемент жидкости (компактная группа молекул, ведущая себя как пассивная примесь, сохраняя свой импульс), прежде чем он перемешивается с другими частицами, передает им свой импульс и потеряет свою индивидуальность.

Прандтль представил турбулентное напряжение $\tau^{(m)}$ в виде:

$$\tau^{(m)} = \rho l^2\left|\overline{V}_{x,z}\right|\overline{V}x,z, \qquad (8)$$

где l – новая длина, которая в отличие от l' не является случайной, «пульсирующей» величиной и имеет тот же порядок что и среднеквадратичное значение $\sqrt{(l')^2}$ и называется длиной «пути перемешивания» Прандтля.

Аналогия между беспорядочными турбулентными пульсациями и «молекулярным хаосом» в кинетической теории газов представлена в виде таблицы

Таблица 1 – Аналогия между Броуновским движением газа и турбулентным движением жидкости

Кинетическая теория газов (КТГ)	Полуэмпирическая теория турбулентности (ПТТ)
$l_м$ – длина свободного пробега молекул	l – путь перемешивания (Л. Прандтль и Дж. Тейлор)
$b_м$ – средняя скорость движения молекул	b^2 –средняя кинетическая энергия движения единицы массы
Ньютоновская гипотеза с линейной зависимостью между тензором напряжений (обусловленным вязкостью) τ_{ij} и тензором скоростей деформации жидкого элемента $V_{i,j} + V_{j,i}$ с коэффициентом пропорциональности, называемым динамической вязкостью $\mu \sim \rho l_м b_м$	По Прандтлю: гипотеза о линейной зависимости между напряжениями Рейнольдса и скоростями деформации движущегося в осредненном потоке жидкого элемента $\tau^{(m)} = -\rho\overline{V_x^{'}V_z^{'}} = \mu^{(m)}\overline{V}_{x,z}$ (для плоскопараллельного движения) $\mu^{(m)} \sim \rho lb$; $b \sim l\left|\overline{V}_{x,z}\right|$, откуда $\mu^{(m)} = \rho l^2\left|\overline{V}_{x,z}\right|$ и $\tau^{(m)} = \rho l^2\left|\overline{V}_{x,z}\right|\overline{V}_{x,z}$ (8)

Определение величины «l» в указанной теории требует привлечения дополнительных соображений или экспериментальных данных.

Развивая идею Прандтля была получена формула трехмерных сдвиговых слоев:

$$\mu^{(m)} = \rho l^2 \left[\left(\overline{V}_{x,y} \right)^2 + \left(\overline{V}_{z,y} \right)^2 \right]^{1/2} \quad (9),$$

для которой рядом авторов предложены полуэмпирические выражения для определения пути перемешивания l, например, следующее:

$$l = æ\, z \left(1 - e^{-z^+ / A^+} \right) \quad (10),$$

(Van Driest, 1956 для пристеночных слоев) $l_0 = C_1 \delta$, где $C_1 = 0{,}089$, δ – толщина пограничного слоя, æ = 0,41 (постоянная Кармана) $A^+ = 26$ (демпфирующая константа).

При полностью развитом пограничном слое предполагается:

$l = æ\, z$, в вязком подслое $z^+ = \dfrac{z\left(|\tau_c| / \rho \right)^{1/2}}{\nu_c}$, где индекс «$c$» означает, что параметры берутся на стенке при $z = 0$.

1.3. Гипотеза Тейлора – модели турбулентности, основанные на «пути перемешивания» Тейлора. Сформулировав свою идею в 1915 г. Тейлор развивает ее подробно в 1932 г. Гипотеза Тейлора наиболее обоснована для одномерного и двумерного плоскопараллельных потоков около плоской стенки.

Как известно, турбулентный поток отличается от ламинарного диффузионным интенсивным переносом массы, импульса, момента импульса и энергии. Для случая движения несжимаемой жидкости важным является диффузионный перенос импульса и момента импульса. В полуэмпирической теории Прандтль считал более важным учесть перенос импульса за счет пульсаций скоростей и давлений в то время, как Тейлор – перенос момента импульса (вихря).

В результате формула Тейлора, учитывающая перенос момента импульса имеет вид:

$$\tau_{,z}^{(m)} = -\rho l_1^2 \overline{V}_{x,z} \overline{V}_{x,zz} \quad (11),$$

где l_1 – «путь перемешивания» по Тейлору.

1.4. Гипотеза Кармана. Весьма общей гипотезой, позволяющей устанавливать связь между путем перемешивания l и осредненным полем скоростей является предложенная в 1930 г. гипотеза Кармана о локальном кинематическом подобии полей турбулентных пульсаций скорости. Согласно этой гипотезе поля турбулентных пульсаций скорости в окрестности каждой точки развитого турбулентного течения за исключением лишь области тонкого вязкого подслоя, где турбулентные напряжения близки к нулю (а проявляется лишь молекулярная вязкость) подобны друг другу и отличаются лишь масштабами длины и времени (или что тоже самое, длины и скорости).

Из этого вытекает зависимость:

$$l = æ \frac{d\overline{V}_x}{dz} \bigg/ \frac{d^2 \overline{V}_x}{dz^2} \quad (12),$$

$$U = BL \frac{d\overline{V}_x}{dz} \quad (13),$$

где æ и B – универсальные постоянные, а L и U – масштабы длины и скорости.

Карман считал, что коэффициент æ должен быть постоянной величиной. Такое предположение не подтверждается экспериментом, особенно при сопоставлении расчетных и экспериментально полученных турбулентных напряжений. Поэтому для задания æ необходимо использовать экспериментальные данные.

1.5. Феноменологическая модель турбулентности модель Рейхардта. Рассмотренные выше модели турбулентности Прандтля и Тейлора могут применяться и давать хорошие результаты лишь в тех случаях, когда экспериментально хорошо изучено турбулентное движение в определенных довольно простых каналах и получены полуэмпирические зависимости с опытными коэффициентами для определения «пути перемешивания» или «турбулентной вязкости». Рассматривая же другие типы течений, мы можем столкнуться с невозможностью без экспериментального изучения применения этих моделей. В сложных же течениях они вообще, не применимы.

Наряду с совершенствованием полуэмпирических моделей были предприняты попытки построить феноменологические модели индуктивного характера. Причем предполагалось, что феноменологические постулируемые зависимости могут применяться для широкого класса турбулентных течений и не требуют дополнительных экспериментальных данных.

Одной из таких моделей является модель турбулентности Г. Рейхардта. При создании своей модели Рейхардт исходит не из построения той или иной модели турбулентности и турбулентного переноса, а на основе критического изучения обширного экспериментального материала о свободной турбулентности (т.е. посредством феномена или явления) он установил, что эпюра скоростей осредненного потока с большой точностью можно аппроксимировать функцией ошибок, т.е. зависимостью, характерной для закона нормального распределения случайной величины. Исходя из этого Рейхардт сводит закономерности свободной турбулентности к простой системе выражений не требующих решения сложных гидродинамических уравнений:

$$\frac{\partial}{\partial x_1} \left(\frac{\overline{p}}{\rho} + V_1^2 \right) + \frac{\partial}{\partial x_2} \left(\overline{V_1' V_2'} \right) = 0 \quad (14),$$

$$\overline{V_1^{'}V_2^{'}} = -\lambda \frac{\partial\left(\overline{V_1^2}\right)}{\partial x_2} \quad (15),$$

где $\lambda(x_1)$ – коэффициент переноса импульса, имеющий размерность длины и подлежащий определению опытным путем.

Совместно решая уравнения (14) и (15) и принимая $\overline{p} = \text{const}$ вдоль внешней границы свободной турбулентности, получим:

$$\frac{\partial\left(\overline{V_1}^2\right)}{\partial x_1} = \lambda \frac{\partial^2\left(\overline{V_1}^2\right)}{\partial x_2^2}. \quad (16)$$

Это основное уравнение Рейхардта определяет распределение скоростей при свободной турбулентности.

Однако гипотеза Рейхардта широкого распространения не получила, т.к. наиболее интересные случаи турбулентного движения в инженерной практике характеризуются связанной турбулентностью, образуемой в исследуемых каналах.

2. Модели турбулентности «*k*», «*k-ε*» и основанные на применении дифференциальных уравнений для напряжений Рейнольдса.

2.1. Уравнение баланса суммарной (полной) кинетической энергии потока вязкой жидкости полученного на основе уравнений Навье-Стокса может быть представлено в виде:

$$\frac{\partial V_i}{\partial t} + V_\alpha \frac{\partial V_i}{\partial x_\alpha} = f_i - \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_i} + \nu \Delta V_i \quad (17)$$

или

$$\dot{V_i} + V_\alpha V_{i,\alpha} = f_i - \frac{1}{\rho} p_{,i} + \nu V_{i,\alpha\alpha}. \quad (17')$$

Напомним, что повторяющийся «немой» индекс означает суммирование по этому индексу (правило Эйнштейна).

Энергетическая или консервативная форма записи уравнения Навье-Стокса имеет вид:

$$\begin{aligned}&\left(\rho \dot{V_i V_j}\right) + \left[\rho V_i V_j V_\alpha + \left(p V_i \delta_{j\alpha} + p V_j \delta_{i\alpha}\right) - \right.\\ &\left. - \left(V_i \sigma_{j\alpha} + V_j \sigma_{i\alpha}\right)\right]_{,\alpha} = \left(\rho V_i f_j + \rho V_j f_i\right) + \\ &+ p\left(V_{i,j} + V_{j,i}\right) - \left(\sigma_{i\alpha} V_{j,\alpha} + \sigma_{j\alpha} V_{i,\alpha}\right)\end{aligned} \quad (18),$$

где $\sigma_{ij} = \mu\left(V_{i,j} + V_{j,i}\right)$ – тензор вязких напряжений в несжимаемой жидкости; $\delta_{i\alpha}$ – символ Кронекера. Произведя почленную свертку тензоров (присвоив вместо индекса j индекс i) (свободный индекс) во всех слагаемых уравнения (18) получим уравнение баланса суммарной кинетической энергии.

$$\dot{E} + \left[E V_\alpha + p V_\alpha - V_i \sigma_{i\alpha}\right]_{,\alpha} = \rho V_i f_i - \rho\varepsilon \quad (19),$$

где: $\varepsilon = \frac{1}{2}\sigma_{i\alpha} V_{i,\alpha} = \frac{\nu}{2}\left(V_{i,\alpha} + V_{i,\alpha}\right)^2$ – удельная на единицу массы жидкости и единицу времени диссипацию кинетической энергии.

$E = \frac{1}{2}\rho V_i V_i = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{3}\rho\left(V_i V_i\right)$ – суммарная кинетическая энергия.

2.2. Уравнение баланса кинетической энергии осредненного движения жидкости полученного на основе уравнения Рейнольдса. Уравнение Рейнольдса может быть записано в следующем виде:

$$\dot{\overline{V_i}} + \overline{V}_\alpha \overline{V}_{i,\alpha} = \bar{f}_i - (1/\rho)\overline{p}_{,i} + \nu \overline{V}_{i,\alpha\alpha} - \left(\overline{V_i^{'} V_\alpha^{'}}\right)_{,\alpha}. \quad (20)$$

Энергетическая или консервативная форма записи уравнения Рейнольдса имеет вид:

$$\begin{aligned}&\left(\rho \dot{\overline{V}_i \overline{V}_j}\right) + \left[\rho \overline{V}_i \overline{V}_j \overline{V}_\alpha + \rho \overline{V_i^{'} V_\alpha^{'}}\, \overline{V}_j + \rho \overline{V_j^{'} V_\alpha^{'}}\, \overline{V}_i + \right.\\ &\left. + \left(\overline{p}\overline{V}_i \delta_{j\alpha} + \overline{p}\overline{V}_j \delta_{i\alpha}\right) - \left(\overline{V}_i \overline{\sigma}_{j\alpha} + \overline{V}_j \overline{\sigma}_{i\alpha}\right)\right]_{,\alpha} = \left(\rho \overline{V}_i \bar{f}_j + \rho \overline{V}_j \bar{f}_i\right) + \\ &+ \overline{p}\left(\overline{V}_{i,j} + \overline{V}_{j,i}\right) - \left(\overline{\sigma}_{i\alpha} \overline{V}_{j,\alpha} + \overline{\sigma}_{j\alpha} \overline{V}_{i,\alpha}\right) + \left(\rho \overline{V_i^{'} V_\alpha^{'}}\, \overline{V}_{j,\alpha} + \rho \overline{V_j^{'} V_\alpha^{'}}\, \overline{V}_{i,\alpha}\right)\end{aligned} \quad (21)$$

Здесь $\overline{\sigma}_{ij} = \mu\left(\overline{V}_{i,j} + \overline{V}_{j,i}\right)$ – тензор вязких напряжений осредненного движения несжимаемой жидкости.

Производя свертку тензоров, т.е. заменив «свободный» индекс j на i и проведя суммирование по «немому» индексу «i» получим уравнение баланса кинетической энергии осредненного движения жидкости в виде:

$$\begin{aligned}&\dot{E_s} + \left[E_s \overline{V}_\alpha + \rho \overline{V_\alpha^{'} V_\beta^{'}}\, \overline{V}_\beta + \overline{p}\,\overline{V}_\alpha - \overline{V}_\beta \overline{\sigma}_{\alpha\beta}\right]_{,\alpha} = \\ &= \rho \overline{V}_\alpha \bar{f}_\alpha - \rho\varepsilon_s + \rho \overline{V_\alpha^{'} V_\beta^{'}}\, \overline{V}_{\beta,\alpha}\end{aligned} \quad (22),$$

где $\varepsilon_s = \frac{1}{\rho}\overline{\sigma}_{\alpha\beta}\overline{V}_{\beta,\alpha} = \frac{\nu}{\rho}\left(\overline{V}_{\alpha,\beta} + \overline{V}_{\beta,\alpha}\right)^2$ – удельная на единицу массы жидкости и единицы времени диссипация кинетической энергии осредненного движения несжимаемой жидкости;

$E_s = \frac{1}{2}\rho \overline{V}_\beta \overline{V}_\beta$ – кинетическая энергия осредненного турбулентного движения несжимаемой жидкости.

2.3. Дифференциальные уравнения для напряжений Рейнольдса. Проведем почленное осреднение по времени по методике Рейнольдса уравнения Навье-Стокса в форме (18), т.е. в консервативной форме.

В итоге получим:

$$\begin{aligned}&\left(\rho \dot{\overline{V}_i \overline{V}_j}\right) + \left(\rho \dot{\overline{V_i^{'} V_j^{'}}}\right) + \left[\left(\rho \overline{V}_i \overline{V}_j \overline{V}_\alpha + \rho \overline{V_i^{'} V_\alpha^{'}}\, \overline{V}_j + \rho \overline{V_j V_\alpha^{'}}\, \overline{V}_i\right) + \right.\\ &+ \left(\rho \overline{V_i^{'} V_j^{'}}\, \overline{V}_\alpha + \rho \overline{V_i^{'} V_j^{'} V_\alpha^{'}}\right) + \left(\overline{p}\overline{V}_i \delta_{j\alpha} + \overline{p}\overline{V}_j \delta_{i\alpha}\right) + \\ &+ \left(\overline{p' V_i^{'}}\delta_{j\alpha} + \overline{p' V_j^{'}}\delta_{i\alpha}\right) - \left(\overline{V}_i \overline{\sigma}_{j\alpha} + \overline{V}_j \overline{\sigma}_{i\alpha}\right) -\end{aligned}$$

$$-\left(\overline{V'_i\sigma'_{j\alpha}}+\overline{V'_j\sigma'_{i\alpha}}\right)\Big]_{,\alpha}=\left(\rho\bar{V}_i\bar{f}_j+\rho\bar{V}_j\bar{f}_i\right)+$$
$$+\left(\rho\overline{V'_i f'_j}+\rho\overline{V'_j f'_i}\right)+\bar{p}\left(\bar{V}_{i,j}+\bar{V}_{j,i}\right)+\left(\overline{p'V'_{i,j}}+\overline{p'V'_{j,i}}\right)- \quad (23)$$
$$-\left(\bar{\sigma}_{i\alpha}\bar{V}_{j,\alpha}+\bar{\sigma}_{j\alpha}\bar{V}_{i,\alpha}\right)-\left(\overline{\sigma'_{i\alpha}V'_{j,\alpha}}+\overline{\sigma'_{j\alpha}V'_{i,\alpha}}\right)$$

Здесь обозначено: $\sigma'_{i\alpha}=\mu\left(V'_{i,\alpha}+V'_{\alpha,i}\right)$ – тензор вязких напряжений в несжимаемой жидкости от пульсационных компонент скорости.

Почленно вычтем из уравнения (23) уравнение (21) и в итоге получим:

$$\left(\dot{\overline{\rho V'_i V'_j}}\right)+\Big[\rho\overline{V'_i V'_j}\bar{V}_\alpha+\rho\overline{V'_i V'_j V'_\alpha}+\left(\overline{p'V'_i}\delta_{j\alpha}+\overline{p'V'_j}\delta_{i\alpha}\right)-$$
$$-\left(\overline{V'_i\sigma'_{j\alpha}}+\overline{V'_j\sigma'_{i\alpha}}\right)\Big]_{,\alpha}=\rho\overline{V'_i f'_j}+\rho\overline{V'_j f'_i}+\overline{p'\left(V'_{i,j}+V'_{j,i}\right)}- \quad (24)$$
$$-\left(\overline{\sigma'_{i\alpha}V'_{j,\alpha}}+\overline{\sigma'_{j\alpha}V'_{i,\alpha}}\right)-\left(\rho\overline{V'_i V'_\alpha}\bar{V}_{j,\alpha}+\rho\overline{V'_j V'_\alpha}\bar{V}_{i,\alpha}\right)$$

Каждое из слагаемых уравнения (24) представляет собой симметричный тензор второго порядка (двухиндексный тензор), и потому (24) представляет собой 6 проекций на оси координат.

Однако система 6 уравнений (24) не обеспечивает замкнутость системы уравнений Рейнольдса и неразрывности т.к. в выражении (24) появились новые неизвестные моменты второго и третьего порядка, типа $\rho\overline{V'_i V'_j V'_\alpha}$, $\overline{p'V'_i}$ и др.

2.4. Уравнение баланса турбулентной кинетической энергии (энергии пульсационных компонент скорости). Заменив в уравнении для напряжений Рейнольдса индекс «j» на «i», т.е. осуществив операцию свертки тензоров, представляющих слагаемые уравнения (24) получим скалярное уравнение:

$$\dot{E}_m+\left[E_m\bar{V}_\alpha+\frac{1}{2}\rho\overline{V'_\beta V'_\beta V'_\alpha}+\overline{p'V'_\alpha}-\overline{V'_\beta\sigma'_{\alpha\beta}}\right]_{,\alpha}= \quad (25),$$
$$=\rho\overline{V'_\alpha f'_\alpha}-\rho\bar{\varepsilon}_m-\rho\overline{V'_\alpha V'_\beta}\bar{V}_{\beta,\alpha}$$

где: $E_m=\frac{1}{2}\rho\overline{V'_\alpha V'_\alpha}$ – турбулентная (пульсационная) кинетическая энергия потока; $\rho\bar{\varepsilon}_m=\overline{\sigma'_{\alpha\beta}V'_{\beta,\alpha}}=\mu/2\overline{\left(V'_{\alpha,\beta}+V'_{\beta,\alpha}\right)^2}$; $\bar{\varepsilon}_m$ – удельная на единицу массы жидкости и единицу времени диссипация пульсационной турбулентной кинетической энергии.

Компонента $\left[\frac{1}{2}\rho\overline{V'_\beta V'_\beta V'_\alpha}\right]_{,\alpha}=\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\rho\overline{V'_\beta V'_\beta V'_\alpha}\right)$ – представляет собой плотность потока турбулентной энергии связанного с переносом обусловленным «турбулентным трением», т.е. пульсационной скоростью.

Компонента $\left[\overline{p'V'_\alpha}\right]_{,\alpha}=\frac{\partial}{\partial x_\alpha}\left(\overline{p'V'_\alpha}\right)$ – (суммирование по индексу «α») представляет плотность потока турбулентной энергии обусловленного пульсацией давления.

Компонента $\left[\overline{V'_\beta\sigma'_{\alpha\beta}}\right]_{,\alpha}$ (суммирование по «α» и «β») – плотность потока турбулентной энергии вызванного силами молекулярного вязкостного трения.

Компонента $\rho\overline{V'_\alpha f'_\alpha}$ имеет не нулевое значение лишь при наличии воздействия пульсирующей массовой силы и представляет собой поток турбулентной энергии обусловленной пульсацией массовой силы.

Компонента $\rho\overline{V'_\alpha V'_\beta}\bar{V}_{\beta,\alpha}$ – описывает взаимные превращения энергии осредненного и пульсационного движения.

Компонента $\rho\bar{\varepsilon}_m$ – представляет диссипацию (т.е. рассеивание и уменьшение с переходом в тепловую энергию) турбулентной энергии обусловленную молекулярной вязкостью жидкости.

$\dot{E}_m=\frac{\partial}{\partial t}\left(E_m\right)$ – локальное изменение со временем энергии турбулентного (пульсационного) характера, а $\left[E_m\bar{V}_\alpha\right]_{,\alpha}$ – ее конвективный перенос.

При рассмотрении уравнения (5') было введено понятие $k=\frac{1}{2}\overline{V'_i V'_i}$ – энергия пульсаций скорости $\left(k=\frac{1}{\rho}E_m\right)$, что дает возможность получить «k»–уравнение.

2.5. Модель турбулентности «k». Модели с применением уравнений для турбулентной энергии [1] («k»–модели) учитывают перенос турбулентной энергии. По существу, отказавшись от прямой связи между градиентами скорости осредненного течения и характерным масштабом пульсаций скорости стали определять этот масштаб из уравнения переноса («k»–уравнения). Если такой масштаб использовать в предыдущих выражениях, то получится известное соотношение Колмогорова-Прандтля:

$$\nu_m=C'_\mu\sqrt{k}L \quad (26).$$

Одним из вариантов записи «k»–уравнений для однофазной, однородной, несжимаемой жидкости ($\rho=\mathrm{const}$) при постоянной температуре и коэффициенте вязкости и при отсутствии пульсаций массовой силы ($f'=0$): представится в виде:

$$\dot{k}+\bar{V}_i k_{,i}+\left[\overline{V'_i\left(\frac{1}{2}V'_j V'_j+p'/\rho\right)}\right]_{,i}= \quad (27),$$
$$=-\overline{V'_i V'_j}\bar{V}_{i,j}-\nu\overline{V'_{i,j}V'_{i,j}}$$

где: $\overline{V}_i k_{,i}$ – конвективный перенос за счет осредненного движения; $\overline{\left[V_i'\left(\frac{1}{2}V_j'V_j' + p'/\rho\right)\right]}_{,i}$ – диффузионный перенос, обусловленный пульсацией скорости и давления; $\overline{V_i'V_j'}\overline{V}_{i,j}$ – генерация энергии, вызванная взаимодействием напряжений Рейнольдса и градиента скорости; $-\nu\overline{V_{i,j}'V_{i,j}'}$ – диссипация.

Модели, основанные на уравнении турбулентной энергии, позволяют учитывать конвективный и диффузионный перенос и предысторию процесса. Турбулентная вязкость предполагается изотропной.

Гипотеза Колмогорова: при $Re \to \infty$ количество диссипированной турбулентной энергии определяется энергосодержащим движением, т.е.

$$\varepsilon = C_D k^{2/3} \quad (28).$$

Определение линейного масштаба L.

В пристеночных погранслоях – наклонное (линейное) распределение. В свободном слое со сдвигом $L = \text{const} \sim h_{слоя}$. Вблизи стенки вне вязкого подслоя логарифмический профиль скорости определяется соотношением:

$$\left(L = C_D / C_\mu'^3\right)^{\frac{1}{4}} \text{ æ}y \quad (29).$$

Модель можно улучшить, вводя алгебраические соотношения для напряжений и потоков, учитывающих неизотропную природу турбулентности.

Область применения модели ограничивается главным образом относительно простыми сдвиговыми слоями, поскольку для более сложных течений трудно получить распределение характерных линейных масштабов.

***2.6. Модель турбулентности «k-ε»* [1].** В этой модели наряду с «k»–уравнением (27) используется «ε»–уравнение диссипации турбулентной кинетической энергии.

По определению удельная на единицу массы жидкости и единицу времени диссипация равна:

$$\varepsilon = \frac{\nu}{2}\sum_{\alpha,\beta}\left(\overline{V}_{\alpha,\beta} + \overline{V}_{\beta,\alpha}\right)^2 . \quad (30)$$

Линейный масштаб характеризует размеры больших энергосодержащих вихрей. На эту величину, как и на энергию k влияют процессы переноса и предыстория (свободная турбулентность). Вместо масштаба L используется

$$\varepsilon \sim k^{3/2}/L . \quad (31)$$

При больших числах Рейнольдса уравнение диссипации записывается в виде:

$$\dot{\varepsilon} + \overline{V}_l \varepsilon_{,l} = -\overline{\left(V_l'\varepsilon'\right)}_{,l} - 2\nu\overline{V_{i,\text{к}}'V_{i,l}'V_{\text{к},l}'} - 2\nu\overline{\left(V_{i,ll}'\right)^2} \quad (32),$$

где $\overline{\left(V_l\varepsilon\right)}_{,l}$ – конвективный перенос; $\overline{\left(V_l'\varepsilon'\right)}_{,l}$ – диффузионный перенос; $2\nu\overline{V_{i,\text{к}}'V_{i,l}'V_{\text{к},l}'}$ – генерация за счет растяжения вихрей; $2\nu\overline{\left(V_{i,ll}'\right)^2}$ – вязкая диссипация.

Модели с двумя уравнениями переноса типа *«k-ε»* – модели оказываются самыми простыми при моделировании течений, для которых трудно получить эмпирические распределения линейных масштабов.

Модельные алгебраические уравнения, замыкающие систему уравнений, включающих «k» и «ε» – уравнения имеют, например, вид:

$$-\overline{V_l'\varepsilon'} = \left(\nu_m/\sigma_\varepsilon\right)\varepsilon_{,l}\,; \; \nu_m = C_\mu k^2/\varepsilon\,; \quad \Gamma_m = \nu_m/\sigma_m\,;$$

$$2\nu\overline{V_{i,k}'V_{i,l}'V_{k,l}'} - 2\nu\overline{\left(V_{i,ll}'\right)^2} = \left(C_{1\varepsilon}P/\varepsilon - C_{2\varepsilon}\right)\left(\varepsilon^2/k\right);$$

$$\dot{\varepsilon} + \overline{V}_i\varepsilon_{,i} = \left[\left(\nu_m/\sigma_\varepsilon\right)\varepsilon_{,i}\right] + C_{1\varepsilon}\left(\varepsilon/k\right)P\left(1 + C_{3\varepsilon}R_f\right) - C_{2\varepsilon}\left(\varepsilon^2/k\right);$$

$\varepsilon_{ij} = 2\nu\overline{V_{i,l}'V_{j,l}'} = \frac{2}{3}\varepsilon\delta_{ij}$; $P = -\overline{V_i'V_j'}\overline{V}_{i,j}$ – генерация k;

$a_{ij} = \overline{V_i'V_j'}/k - \frac{2}{3}\delta_{ij}$ – тензор анизотропии; где: $C_\mu = 0{,}09$; $C_{1\varepsilon} = 1{,}44$; $C_{2\varepsilon} = 1{,}92$; $C_{3\varepsilon} = 0{,}8$; $\sigma_k = 1{,}0$; $\sigma_\varepsilon = 1{,}3$.

Возможна модификация модели, если вместо соотношений для изотропных коэффициентов турбулентной вязкости представить более или менее точно отражающие процессы в турбулентном потоке алгебраические соотношения потоков (напряжений).

***2.7. Модели турбулентности, основанные на применении дифференциальных уравнений для компонент тензора турбулентных напряжений* [1]**. Один из видов представления уравнения для турбулентных напряжений (напряжений Рейнольдса) имеет вид:

$$\begin{aligned} &\dot{\overline{V_i'V_j'}} + \overline{\left(V_i'V_j'\right)}_{,k}\overline{V}_k + \overline{V}_{i,k}\overline{V_k'V_j'} + \overline{V}_{j,k}\overline{V_k'V_i'} + \\ &+\left[\overline{V_i'V_j'V_k'} + \overline{p'V_j'}\,\delta_{ik}/\rho + \overline{p'V_i'}\,\delta_{jk}/\rho\right]_{,k} = \\ &= \left[\overline{p'^{(2)}\left(V_{i,j}' + V_{j,i}'\right)}/\rho - 2\nu\overline{V_{i,k}'V_{j,k}'} + 2\overline{\varepsilon}\delta_{ij}/3\right] + \\ &+ \overline{p'^{(1)}\left(V_{i,j}' + V_{j,i}'\right)/\rho} - 2\overline{\varepsilon}\delta_{ij}/3 \end{aligned} \quad (33)$$

В итоге получаем систему уравнений Рейнольдса, неразрывности и для напряжений Рейнольдса (33) (в проекциях на оси координат – 10 дифференциальных уравнений второго порядка в частных производных) являющуюся по-прежнему не замкнутой, т.к. в уравнении (33) появились новые подлежащие определению слагаемые.

В работе [1] представлены полуэмпирические алгебраические уравнения более точно отражающие процессы, происходящие в турбулентном потоке и замыкающие систему уравнений в которую входит уравнение (33). Там же отмечается, что модели турбулентности с уравнениями для напряжений Рейнольдса описывают турбулентные процессы более реалистично и являются единственными перспективными моделями течений, в которых перенос отдельных компонент напряжений и потоков играет существенную роль и не могут быть хорошо аппроксимированы в рамках переноса кинетической энергии k. Эти модели трудоемки с вычислительной точки зрения, до сих пор мало апробированы и пока не нашли применения в инженерной практике.

3. Анализ недостатков существующих математических описаний турбулентных потоков и предложения по их совершенствованию [2, 4, 5].

3.1. Недостатки описания турбулентных потоков с помощью уравнений Рейнольдса (осредненных по времени уравнений Навье-Стокса) и неразрывности. В основу вывода дифференциальных уравнений гидродинамики положена гипотеза сплошности. Она заключается в абстрагировании от атомно-молекулярного строения вещества и рассмотрении вместо микрообъема макроскопический (содержащий десятки миллионов молекул) объем, в пределах которого параметры потока не меняются и его можно рассматривать, как бесконечно малый объем или точку в движущемся потоке жидкости.

Основным свойством гипотезы сплошности является то, что во все время движения жидкости любые две частицы жидкости, находящиеся на бесконечно близком расстоянии все время, будут находится на бесконечно близком расстоянии.

Рассмотрим последовательность вывода уравнений Рейнольдса [4]. Используя закон сохранения импульса для жидкого (ограниченного жидкой поверхностью, состоящей из одних и тех же перемещающихся с потоком частиц жидкости) объема:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\hat{W}}\rho\vec{V}dW = \int\limits_{\hat{W}}\rho\vec{f}dW + \oint\limits_{\hat{S}}\vec{n}\cdot\vec{T}dS \qquad (34),$$

где $\vec{f}$ – единичная массовая сила; $\vec{T}$ – тензор напряжений; $\hat{W}$, $\hat{S}$ – жидкий объем, поверхность.

Используя формулу Гусса-Остроградского и уравнение переноса получим основное уравнение динамики сплошной среды – уравнение в напряжениях:

$$\vec{f} + \frac{1}{\rho}div\vec{T} = \frac{d\vec{V}}{dt}. \qquad (35)$$

Используя реологическую формулу для Ньютоновской вязкой несжимаемой жидкости:

$$\vec{T} = -p\vec{I} + 2\mu\vec{D} \qquad (36),$$

где $\vec{I}$ – единичный тензор; $\vec{D}$ – тензор скоростей деформации жидкого элемента, получаем уравнение Навье-Стокса. Далее осредняя по времени (по формуле Рейнольдса) почленно слагаемые уравнения Навье-Стокса получим уравнение Рейнольдса.

На основе вышеизложенного делаем вывод. Диффузионный перенос в турбулентном потоке массы, импульса, момента импульса и энергии через «жидкую» поверхность, ограничивающую перемещающийся вместе с потоком «жидкий» объем не предусмотрены уравнениями «в напряжениях» и «Навье-Стокса». Кроме того, диффузионный перенос нарушает основное свойство сплошной среды, когда два бесконечно близких элемента жидкости остаются на бесконечно близком расстоянии во все время движения жидкости. Это наводит на мысль, что уравнение Рейнольдса являются приближенными.

Рассматривая физический смысл компонент тензора турбулентных напряжений, делаем вывод, что они обусловлены диффузионным переносом импульса $\rho V_i'$ с пульсационной скоростью V_j'. Однако, в турбулентном потоке с пульсационной скоростью V_j' (диффузионный перенос) происходит перенос импульса определяемого полной скоростью $\rho(\overline{V_i} + V_i')$, что не учитывается тензором турбулентных напряжений, как и не учитывается системой уравнений Рейнольдса и неразрывности диффузионый перенос момента импульса и трансформацию импульса в момента и наоборот.

3.2. Система уравнений, учитывающая диффузионный перенос импульса, момента импульса и трансформацию импульса в момент импульса и наоборот **[3].** При движении однофазной, однородной несжимаемой жидкости ($\rho = \text{const}$) при постоянной температуре и постоянными коэффициентами вязкости динамика процесса определяется четырьмя законами сохранения: массы, импульса, момента импульса и энергии. Турбулентное движение жидкости отличается от ламинарного тем, что наряду с конвективным переносом в турбулентном потоке наблюдается интенсивный диффузионный перенос массы, импульса, момента импульса и энергии. Анализ показывает, что для вышеотмеченной жидкости существенным является лишь диффузионный перенос импульса и момента импульса, а также учет законов сохранения массы, импульса и момента импульса. Турбулентный процесс движущейся жидкости характеризуется генерацией турбулентности (завихренности), т.е. трансформацией энергии импульса в энергию момента импульса и наоборот, диссипацией турбулентности, конвективным и диффузионным переносом, каскадным дроблением крупномасштабных вихрей и др.

На основе вышесказанного предлагается следующая система уравнений, описывающих динамическое поведение турбулентного потока.

1. Закон сохранения массы и его дифференциальная форма для несжимаемой жидкости – уравнение неразрывности:

$$\overline{V}_{i,i} = 0\,;\ \left(div\vec{V}\right) = 0\,. \tag{37}$$

2. Закон сохранения импульса и уравнение Рейнольдса полученное из этого закона.

$$f_i - (1/\rho)\overline{p}_{,i} + \nu\overline{V}_{i,jj} - (1/\rho)\tau_{ij,j}^{(m)} = \dot{\overline{V}}_i + \overline{V}_j\overline{V}_{i,j} \tag{38}$$

при этом:

$$\tau_{ij,j}^{(m)} = -\rho\left[\overline{V_i'V_j'} \pm \left(\overline{V_i'V_j'}\right)^{\frac{1}{2}}\overline{V}_i\right]_{,j} \tag{39}$$

где знак (+) меняется на (-) при переходе от четного к нечетному циклу числового расчета.

3. Уравнение трансформации энергии в энергию момента импульса и наоборот:

$$\vec{r}\times\vec{f} - \vec{r}\times(1/\rho)\nabla\overline{p} + \vec{r}\times\left(\nu\nabla^2\overline{\vec{V}}\right) - \vec{r}\times\left[(1/\rho)\nabla\cdot\vec{T}^{(m)}\right] = = \vec{r}\times\frac{\partial\overline{\vec{V}}}{\partial t} + \vec{r}\times\left(\overline{\vec{V}}\nabla\right)\overline{\vec{V}} \tag{40}$$

где $\vec{T}^{(m)}$ – тензор турбулентных напряжений $\left(\tau_{ij}^{(m)}\right)$.

4. Закон сохранения момента импульса (интегральная форма):

$$\frac{d}{dt}\int_W \rho\left(\vec{r}\times\overline{\vec{V}}\right)dW = \int_V \rho\left(\vec{r}\times\vec{f}\right)dW + \oint_S\left(\vec{r}\times\vec{\tau}_n\right)dS + \overline{+\oint_S\left[\vec{r}\times\left(\overline{\vec{V}}+\vec{V}'\right)\right]\vec{V}'\left(\pm\vec{n}\right)dS} \tag{41}$$

где $\vec{\tau}_n = \left(\tau_{ij}\right)_n = \left(\tau_{ij}^{(\nu)} + \tau_{ij}^{(m)}\right)_n$; $\overline{\oint_S\left[\vec{r}\times\left(\overline{\vec{V}}+\vec{V}'\right)\right]\vec{V}'\left(\pm\vec{n}\right)dS}$ диффузионный перенос момента импульса за счет пульсаций скорости $\vec{V}'$.

Безусловно, система уравнений ($38 \div 41$) требует критической проверки и оценки в первую очередь на предмет существования и единственности решения.

Выводы. 1. Проведенный анализ полуэмпирических моделей турбулентности показал недостатки и возможности их применения для простейших одномерных и двумерных потоков.

2. Модели турбулентности «*k*» и «*k*-ε» являются наиболее широко применяемых в инженерной практике для расчета трехмерных турбулентных потоков. Однако скалярные уравнения k и ε (преобразования турбулентной кинетической энергии и ее диссипации) дополняющие уравнения Рейнольдса и неразрывности описывают крупномасштабную турбулентность (завихренность) обуславливающую анизотропную «турбулентную вязкость» с определенной степенью погрешности, что не дает возможность прогнозировать КПД гидротурбины с высокой точностью, обеспеченной модельными физическими испытаниями.

3. Модель турбулентности, основанная на дифференциальных уравнениях для напряжений Рейнольдса дополняющая систему уравнений Рейнольдса и неразрывности, является пока еще сложной для инженерных расчетов и мало апробированной.

4. Система уравнений, описывающих турбулентный поток предложенная в настоящей статье более точно учитывает процессы, происходящие в турбулентном потоке, имеет перспективы, но требует серьезного изучения.

Список литературы:

1. Методы расчета турбулентных течений, пер. с англ./ ред. *В. Колльмана* – М. : Мир, 1984. – 468 с.
2. *Потетенко О. В.* Особенности рабочего процесса и структуры потока в межлопастных каналах рабочего колеса и в других элементах проточной части радиально-осевых гидротурбин на напоры 400-600 м / *О. В. Потетенко, Л. К. Яковлева, Д. Т. Б. Самба Битори* // Bulletin of NTU "KhPI". Ser.: Hydraulic machines and hydraulic units. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2016. – № 41 (1213). – С. 39–48.
3. *Потетенко О. В.* К вопросу учета диффузионного переноса момента импульса и трансформации его энергии в энергию импульса и, наоборот, при моделировании турбулентных потоков / *О. В. Потетенко, Е. С. Крупа* // Bulletin of NTU "KhPI", Ser.: Hydraulic machines and hydraulic units. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2015 – № 3(1112). – С. 37–44.
4. *Серрин, Дж.* Математические основы классической механики жидкости, пер. с англ. / *Дж. Серрин*. – М.: Изд. иностр. лит., 1963.–256 с.
5. *Потетенко О. В.* Особенности рабочего процесса радиально-осевых гидротурбин на высокие напоры / *О. В.Потетенко, Е. С. Крупа* // Bulletin of NTU "KhPI". Ser.: Hydraulic machines and hydraulic units. – Kharkiv: NTU "KhPI", 2015. – № 45(1154).– С. 41-46.

References (transliterated)

1. *Metodyi rascheta turbulentnyih techeniy, per. s angl.*/ red. Kollmana V. Moscow: Mir, 1984. Print.
2. Potetenko, O. V., L. K. Yakovleva and D. T. B. Samba Bitori "Osobennosti rabochego processa i struktury potoka v mezhlopastnyh kanalah rabochego kolesa i v drugih jelementah protochnoj chasti radial'no-osevyh gidroturbin na napory 400–600 m." *Bulletin of NTU "KhPI". Ser. :Hydraulic machines and hydraulic units.* No 41 (1213). Kharkiv: NTU "KhPI", 2016. 39–48. Print.
3. Potetenko, O. V. and E. S Krupa "K voprosu ucheta diffuzionnogo perenosa momenta impul'sa i transformacii ego jenergii v jenergiju impul'sa i, naoborot, pri modelirovanii turbulentnyh potokov." *Bulletin of NTU "KhPI". Ser.: Hydraulic machines and hydraulic units.* No 3(1112) .Kharkiv: NTU "KhPI", 2015. 37–44. Print.
4. Serrin, Dzh. *Matematicheskie osnovy klassicheskoj mehaniki zhidkosti*. Moscow: Izd. inostr. liter., 1963. Print.
5. Potetenko, O. V., and E. S. Krupa. "Osobennosti rabochego processa radial'no-osevyh gidroturbin na vysokie napory." *Bulletin of NTU "KhPI". Ser.: Hydraulic machines and hydraulic units.* No. 45 (1154). Kharkiv: NTU "KhPI", 2015. 41–46. Print.

Поступила (received) 04.04.2018

Бібліографічні описи / Библиографические описания / Bibliographic descriptions

К вопросу совершенствования математического описания турбулентного движения вязкой несжимаемой жидкости / О. В. Потетенко, Л. К. Яковлева, Т. Д. Б. Самба Битори // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Гідравлічні машини та гідроагрегати. – Х.: НТУ«ХПІ», 2018. – № 17 (1293). – С. 34–42. – Бібліогр.: 5 назв. – ISSN 2411-3441 (print), ISSN 2523-4471 (online)

К вопросу совершенствования математического описания турбулентного движения вязкой несжимаемой жидкости / О. В. Потетенко, Л. К. Яковлева, Т. Д. Б. Самба Битори // Вісник НТУ «ХПІ». Серія: Гідравлічні машини та гідроагрегати. – Х.: НТУ«ХПІ», 2018. – № 17 (1293). – С. 34–42. – Бібліогр.: 5 назв. – ISSN 2411-3441 (print), ISSN 2523-4471 (online)

To the question of perfection of mathematical description of turbulent motion of viscid incompressible liquid / O. V. Potetenko, L. K. Yakovleva, T. D. B. Samba Bitory // Bulletin of NTU "KhPI". Series: Hydraulic machines and hydraulic units. – Kharkov : NTU "KhPI", 2018. –No 17 (1293). – С. 34–42. – Bibliogr.: 5. – ISSN 2411-3441 (print), ISSN 2523-4471 (online)

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Потетенко Олег Васильович – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», професор кафедри «Гідравлічні машини»; тел.: (068) 893-38-02; e-mail: potetenko.OV@gmail.com.

Потетенко Олег Васильевич – кандидат технических наук, доцент, Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», профессор кафедры «Гидравлические машины»; тел.: (068) 893-38-02; e-mail: potetenko.OV@gmail.com.

Potetenko Oleg Vasilyevich – Candidate of Technical Sciences (Ph. D.), Docent, National Technical University "Kharkov Polytechnic Institute", Professor at the Department of "Hydraulic machines"; tel.: (068) 893-38-02; e-mail: potetenko.OV@gmail.com.

Яковлєва Людмила Костянтинівна – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», старший викладач кафедри «Гідравлічні машини»; тел.: (066) 823-50-46; e-mail: yluda@i.ua.

Яковлева Людмила Константиновна – Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», старший преподаватель кафедры «Гидравлические машины»; тел.: (066) 823-50-46; e-mail: yluda@i.ua.

Yakovleva Lydmila Konstantinovna – National Technical University "Kharkov Polytechnic Institute", Senior Lecturer at the Department of "Hydraulic machines"; tel.: (066) 823-50-46; e-mail: yluda@i.ua.

Самба Біторі Трезор Дес Бекет – Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», аспірант кафедри «Гідравлічні машини»; тел.: (093) 751-37-05; e-mail: tresor.samba@mail.ru.

Самба Битори Трезор Дес Бекет – Национальный технический университет «Харьковский политехнический институт», аспирант кафедры «Гидравлические машины»; тел.: (093) 751-37-05; e-mail: tresor.samba@mail.ru.

Samba Bitori Tresor Des Becket – National Technical University "Kharkov Polytechnic Institute", Postgraduate Student at the Department of "Hydraulic machines"; tel.: (093) 751-37-05; e-mail: tresor.samba@mail.ru.