УДК 631.7.04-197:631:7.019.15 **doi: 10.20998/2411-3441.2020.1.01**

Ю. М. МАЦЕВИТЫЙ, В. О. ПОВГОРОДНИЙ, Н. А. САФОНОВ

ИСПОЛЬЗОВАНИЕ МЕТОДОЛОГИИ РЕШЕНИЯ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ РАЗРУШЕНИЯ ЭЛЕМЕНТОВ ЭНЕРГЕТИЧЕСКОГО ОБОРУДОВАНИЯ

В статье предложен метод определения максимальной тепловой нагрузки по измеренному с определённой погрешностью температурному (термическому) напряжению путём решения обратной задачи термоупругости. Определение максимальной тепловой нагрузки точно так же, как и регулирование внешних и внутренних температурных и силовых нагрузок, при которых будут достигнуты температурные напряжения или перемещения в элементах конструкций в допустимых пределах, имеют существенное теоретическое значение и представляют собой большую практическую ценность. Целесообразным путём нахождения этих величин в функции времени и геометрических координат является решение обратных задач теплопроводности и термоупругости, т. е определение температурного поля, исходя из поля температурных напряжений. Для получения устойчивого решения обратной задачи термоупругости используется метод А. Н. Тихонова с эффективным поиском параметра регуляризации. Функционал А. Н. Тихонова отражает отклонение температурного напряжения, полученного в результате наблюдения, от рассчитанного на основе приближенного решения прямой задачи термоупругости методом конечных элементов. В этом функционале в качестве слагаемого к квадрату указанного отклонения используется стабилизирующий функционал с параметром регуляризации. Поиск параметра регуляризации осуществляется с помощью алгоритма, аналогичного алгоритму поиска корня нелинейного уравнения. Использование в методе функций влияния позволяет представлять температуру и температурное напряжение в зависимости от одного и того же вектора, что существенно облегчает реализацию итерационного процесса. Предложенный метод позволяет, не доводя объект исследования до разрушения, определять нагрузку, при которой он будет разрушен. Экономичность данного метода состоит в том, что его применение удешевляет сложные экспериментальные исследования технических объектов и исключает необходимость создания расчетно-аналитических методик, сопровождающих эти исследования. В то же время метод облегчает разработку алгоритмов для аналитического и численного решения ряда задач температурного управления. В частности, решая обратную задачу термоупругости, можно определить температурные поля элементов турбоустановок по замеренным в них температурным напряжениям. Что касается результатов проведенного исследования, то они могут быть использованы, как неотъемлемая часть проектирования других объектов энергетического машиностроения, а также для расчета их ресурса и выбора систем охлаждения.

Ключевые слова: обратная задача, температурное напряжение, функции воздействия, сплайн, идентификация, регуляризация, функционал.

Ю. М. МАЦЕВИТИЙ, В. О. ПОВГОРОДНІЙ, М. О. САФОНОВ

ВИКОРИСТАННЯ МЕТОДОЛОГІЇ РОЗВ'ЯЗКУ ОБЕРНЕНИХ ЗАДАЧ ДЛЯ ПРОГНОЗУВАННЯ РУЙНУВАННЯ ЕЛЕМЕНТІВ ЕНЕРГЕТИЧНОГО ОБЛАДНАННЯ

У статті запропоновано метод визначення максимального теплового навантаження за виміряним з певною похибкою температурним (термічним) напруженням шляхом розв'язання оберненої задачі термопружності. Визначення максимального теплового навантаження точно так саме, як і регулювання зовнішніх і внутрішніх температурних і силових навантажень, при яких будуть досягнуті температурні напруження або переміщення в елементах конструкцій в допустимих межах, мають істотне теоретичне значення та являють собою велику практичну цінність. Доцільним шляхом знаходження цих величин у функції часу та геометричних координат є розв'язок обернених задач теплопровідності та термопружності, тобто визначення температурного поля, виходячи з поля температурних напружень. Для отримання стійкого розв'язку оберненої задачі термопружності використовується метод А. М. Тихонова з ефективним пошуком параметра регуляризації. Функціонал А. М. Тихонова відображає відхилення температурної напруги, отриманої в результаті спостереження, від розрахованого на основі наближеного розв'язку прямої задачі термопружності методом скінченних елементів. У цьому функціоналі, як додаток до квадрату зазначеного відхилення, використовується стабілізуючий функціонал з параметром регуляризації. Пошук параметра регуляризації здійснюється за допомогою алгоритму, аналогічного алгоритму пошуку кореня нелінійного рівняння. Використання методу функцій впливу дозволяє представляти температуру та температурне напруження в залежності від одного і того ж вектора, що істотно полегшує реалізацію ітераційного процесу. Запропонований метод дозволяє, не доводячи об'єкт дослідження до руйнування, визначати навантаження, при яких він буде зруйнований. Економічність даного методу полягає в тому, що його застосування здешевлює складні експериментальні дослідження технічних об'єктів і виключає необхідність створення розрахунково-аналітичних методик, які супроводжують ці дослідження. У той же час метод полегшує розробку алгоритмів для аналітичного та чисельного розв'язку ряду задач температурного керування. Зокрема, вирішуючи обернену задачу термопружності, можна визначити температурні поля елементів турбоустановок по заміряним в них температурним напруженням. Що стосується результатів проведеного дослідження, то вони можуть бути використані, як невід'ємна частина проектування інших об'єктів енергетичного машинобудування, а також для розрахунку їх ресурсу та вибору систем охолодження.

Ключові слова: обернена задача, температурне напруження, функції впливу, сплайн, ідентифікація, регуляризація, функціонал.

Yu. MATSEVITY, V. POVHORODNII, M. SAFONOV

APPLICATION OF THE METHODOLOGY OF THE SOLUTION OF INVALIDATED TASKS FOR THE DECLARATION OF THE DESTRUCTION OF THE ELEMENTS OF THE ENERGY EQUIPMENT

The article proposes a method for determining the maximum thermal load from the temperature (thermal) voltage measured with a certain error by solving the inverse problem of thermoelasticity. The determination of the maximum thermal load in the same way as the regulation of external and internal temperature and power loads, at which the temperature stresses or displacements in the structural elements within acceptable limits are achieved, are of significant theoretical value and are of great practical value. An expedient way of finding these quantities as a function of time and geometric coordinates is to solve the inverse problems of thermal conductivity and thermoelasticity, i. e., to determine the temperature field based on the field of temperature stresses. To obtain a stable solution to the inverse problem of thermoelasticity, A. N. Tikhonov's method is used with an effective search for the regularization parameter. The functional of A. N. Tikhonov reflects the deviation of the temperature stress obtained as a result of observation from that calculated on the basis of an approximate solution of the direct problem of thermoelasticity by the finite element method. In this functional, the stabilizing functional with the regularization parameter is used as the term to the square of the indicated deviation. The search for the regularization parameter is carried out using an algorithm similar to the search algorithm for the root of a nonlinear equation. The use of influence functions in the method allows one to represent temperature and temperature stress depending on the same vector, which greatly facilitates the implementation of the iterative process. The proposed method allows, without bringing the research object to failure, to determine the load at which it will be destroyed. The cost-effectiveness of this method lies in the fact that its application reduces the cost of complex experimental studies of technical objects and eliminates the need to create analytical methods that accompany these studies. At the same time, the method facilitates the development of algorithms for the analytical and numerical solution of a number of temperature control problems. In particular, solving the inverse problem of thermoelasticity, it is possible to determine the temperature fields of elements of turbine units by the measured temperature stresses in them. As for the results of the study, they can be used as an integral part of the design of other objects of power engineering, as well as to calculate their resource and the choice of cooling systems.

Keywords: inverse problem, thermal stress, functions of influence, spline, identification, regularization, functional.

Введение. Неравномерное распределение температуры в теле приводит к появлению деформаций и напряжений. Температурные напряжения могут возникать также при равномерном распределении температур в составном теле, если его элементы имеют различные теплофизические характеристики. Эффективность принимаемых решений при проектировании различного промышленного оборудования зависит как от глубины и достоверности знаний явлений теплообмена и термоупругости, так и от адекватности моделирования этих явлений.

Подходы к построению моделей термомеханики сплошной среды освещены в публикациях Я. И. Бурака [1], В. М. Вигака [2], В. Т. Гринченко, Э. И. Григолюка, Я. М. Григоренко, А. Н. Гузя, А. А. Ильюшина, В. Г. Карнаухова, А. Д. Коваленко, Ю. М. Коляно, И. А. Мотовиловца, Ю. В. Немировского, Я. С. Подстригача, Б. Е. Победри, А. Ф. Улитко, Ю. Н. Шевченко, Н. А. Шульги, B. Boley [3], A. C. Eringen, E. Melan, W. Nowacki, H. Parkus, J. Weiner, R. Roy, S. Bagade, H. Tanigawa [4] и других учёных. В этих работах построены математические модели процесса деформации тела под действием тепловой и силовой нагрузок.

Если в рамках построенной модели нужно определить теплофизические, механические и геометрические характеристики исследуемых объектов, то необходимо решить обратные задачи. Теория обратных задач и подходы к определению указанных характеристик изложены в работах А. О. Ватульяна [5], Р. М. Кушнира, Ю. М. Мацевитого [6], Ю. В. Немировского, Я. С. Подстригача, В. Г. Романова, А. Н. Тихонова [7], Е. Г. Янютина, В. Г. Яхно, R. Bellman, R. Lattes, J. L. Lions и других учёных.

Между тем, экспериментальное определение величин, входящих в эти модели, зачастую не может служить исчерпывающим источником информации об условиях однозначности. В связи с этим в последнее время большое внимание уделяется решению обратных задач термоупругости, в которых по имеющимся (весьма ограниченным) сведениям о температурных напряжениях внутри тела можно определять теплофизические свойства и геометрические характеристики объекта, идентифицировать начальные и граничные условия, а также уточнять саму математическую модель явления. Такие задачи могут возникать при дистанционных измерениях, при неразрушающем контроле состояния конструкций, при изучении теплового воздействия на спускаемые космические аппараты, при определении теплофизических свойств новых материалов и т. п.

Что касается обратных задач термоупругости, то решение таких задач часто сводится к решению обратных задач теплопроводности. Исследования, основанные на таком подходе, систематизированы в монографиях О. М. Алифанова, А. В. Мултановского, Л. А. Коздобы, П. Г. Круковского, Ю. М. Мацевитого; J. V. Beck, B. Blackwell, C. R. Clair; H. W. Engl, M. Neubauer; K. Kurpisz, A. J. Novak. Но, поскольку подавляющее большинство алгоритмов построения решений обратных задач теплопроводности предполагает наличие экспериментальной информации во внутренних точках тела, а нарушение целостности детали с целью проведения соответствующих исследований не всегда оправдано, это ограничивает возможность их практического использования.

Речь об исследованиях, основанных на решении обратных задач термоупругости путем доопределения их дополнительной информацией о поведении механических параметров (перемещений, деформаций или напряжений) в некоторых точках тела, идет в публикациях C. M. Cialkovski, K. C. Deshmukh, A. Fomin, K. Grysa, M. R. Hematiyan, N. L. Khobragade [8–15], V. Kozlov, Z. Kozlowski, V. S. Kulkarni, H. L. Lee, V. Mazya, в которых отмечена эффективность такого подхода и его превосходство над другими подходами.

Решение обратных задач в ряде случаев являются практически единственным способом получения необходимой информации об исследуемом объекте. Они дают возможность проводить исследования в условиях, максимально приближенных к натурным, или непосредственно при эксплуатации объектов, что позволяет более обоснованно их проектировать.

Целью решения обратных задач термоупругости может быть, например, оценка температурного поля по данным измерения термонапряжений внутри тела. Ниже рассмотрен подход к решению обратной задачи термоупругости на примере простейшей задачи.

Известно, что энергетическое оборудование в процессе эксплуатации подвергается интенсивному нагреву, в результате которого могут возникать предельные термические напряжения, приводящие к его разрушению. Так вот, в результате решения обратной задачи термоупругости определяется предельная тепловая нагрузка, при которой максимальные термонапряжения становятся критическими, и происходит разрушение материала оборудования.

Постановка задачи. Рассматривается тестовая задача термоупругости для бесконечного кругового цилиндра с целью определения в нём максимальной тепловой нагрузки w (в виде теплового потока на внешней границе q или мощности источников тепла f) [16, 17]

$$\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(rk\frac{\partial T}{\partial r}\right) = f, \quad r_1 < r < r_2, \tag{1}$$

$$k\frac{\partial T}{\partial r} = \alpha_{\text{т}}(T - T_{\text{ср}}), \quad r = r_1, \tag{2}$$

$$-k\frac{\partial T}{\partial r} = q, \quad r = r_2, \tag{3}$$

$$\begin{gathered}(\lambda + 2\mu)\frac{d}{dr}\left[\frac{1}{r}\frac{d(ry)}{dr}\right] - \\ -(3\lambda + 2\mu)\alpha\frac{dT}{dr} = 0, \quad r_1 < r < r_2,\end{gathered} \tag{4}$$

$$\sigma_r(r_1) = 0, \quad \sigma_r(r_2) = 0, \tag{5}$$

где r – пространственная координата;

r_1, r_2 – радиусы внутренней и внешней поверхностей цилиндра;

T – температура;

$T_{\text{ср}}$ – температура окружающей среды;

$\alpha_{\text{т}}$ – коэффициент теплоотдачи;

q – тепловой поток;

k – коэффициент теплопроводности;

f – мощность источников тепла;

λ, μ – коэффициенты Ламе;

y – радиальное перемещение;

α – коэффициент линейного расширения материала;

σ_r – радиальное напряжение.

Для дискретно увеличивающейся тепловой нагрузки в виде q или f путём решения прямой задачи термоупругости (1)–(5) вычисляется максимальное напряжение

$$\sigma_{\max} = \sigma(r_{\max}) = \max_{r \in [r_1,\, r_2]} \sqrt{\sigma_r^2(r) + \sigma_\varphi^2(r)}\,,$$

где $r_{\max}$ – координата точки с максимальным напряжением, а радиальное σ_r и окружное σ_φ напряжения имеют вид [17]:

$$\sigma_r = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial y}{\partial r} + \lambda\frac{y}{r} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T,$$

$$\sigma_\varphi = \lambda\frac{\partial y}{\partial r} + (\lambda + 2\mu)\frac{y}{r} - (3\lambda + 2\mu)\alpha T.$$

Метод решения. Для идентификации тепловой нагрузки по измеренным напряжениям решается обратная задача термоупругости. Пусть экспериментально полученное максимальное напряжение имеет вид $\sigma_{ex} = \sigma(r_{\max}) + \sigma(r_{\max})\delta$, где δ – погрешность измерения. Процедура поиска тепловой нагрузки строится путём минимизации функционала Тихонова А. Н. [18]

$$J = (\sigma_{\max} - \sigma_{ex})^2 + \xi\sigma_{\max}^2. \tag{6}$$

Здесь $\sigma_{\max}$ – расчетное максимальное напряжение; σ_{ex} – экспериментально измеренное максимальное напряжение; ξ – параметр регуляризации.

В силу линейной зависимости максимального напряжения от тепловой нагрузки $\sigma_{\max} = bw$, функционал (6) преобразуется следующим образом

$$J = (bw - \sigma_{ex})^2 + \xi b^2 w^2, \tag{7}$$

где w – тепловая нагрузка q или f;

b – постоянная величина, для каждого вида нагрузки своя.

Выражение для вычисления w получается после дифференцирования (7) по w и приравнивания производной к нулю, т. е.

$$w = \frac{\sigma_{ex}}{b(1+\xi)}.$$

Поиск параметра регуляризации ξ осуществляется с помощью итерационного процесса [19, 20].

Результаты. Для большей убедительности полученных результатов был проведен многофакторный эксперимент.

Ниже на рис. 1–3 представлены зависимости напряжений от величины тепловой нагрузки w.

В табл. 1 показана сходимость итерационного процесса при погрешности $\delta = 0{,}01$.

Теплофизические и механические характеристики, использованные в задаче (1)–(5), соответствуют алюминию: $k = 209$ Вт/(м·К), $\lambda = 0{,}5471089 \cdot 10^5$ МПа, $\mu = 0{,}2574626 \cdot 10^5$ МПа, $\alpha = 0{,}000024$ К$^{-1}$.

Граничные условия: $\alpha_{\text{т}} = 100$ Вт/(м^2·К), $T_{\text{ср}} = 0$.

Геометрические размеры: $r_1 = 0{,}1$ м, $r_2 = 0{,}5$ м.

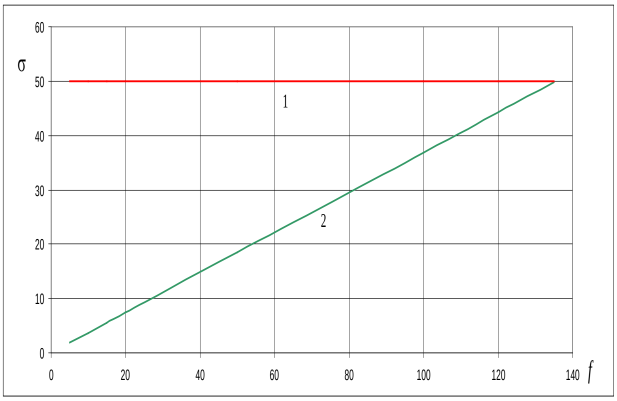

Рис. 1. Зависимость максимальных напряжений от f :
1 – $\sigma_{\text{в}}$ (временное сопротивление разрыву); 2 – $\sigma_{\max}$

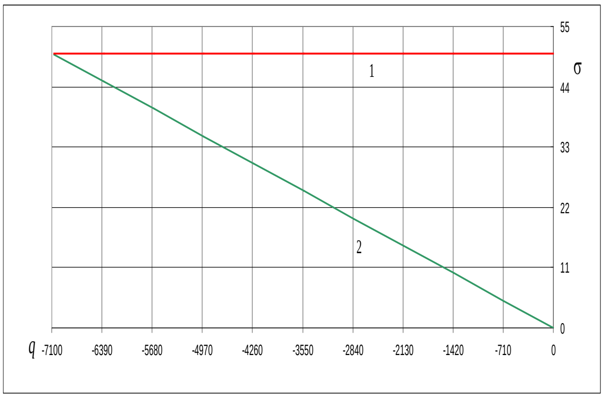

Рис. 2. Зависимость максимальных напряжений от q на границе цилиндра:
$1 - \sigma_в$; $2 - \sigma_{max}$

Таблица 1 – Сходимость итераций по q и по ξ

№	q	ξ
1	–6490,214	0,000005
2	–6799,936	0,0000025
3	–6966,153	0,00000125
4	–7052,347	0,00000063
5	–7096,248	0,00000031
6	–7074,299	0,00000047
7	–7063,271	0,00000055
8	–7068,746	0,00000051
9	–7071,487	0,00000049
10	–7070,116	0,00000050
11	–7069,431	0,00000050
12	–7069,774	0,00000050
13	–7069,945	0,00000050

В табл. 2 приведены зависимости идентифицированных мощностей источников f (при $q = 0$) и потоков q (при $f = 0$) от погрешности измерения напряжений на внешней боковой поверхности цилиндра δ при заданных для решения прямой задачи $f = 135{,}0$ Вт/м^3, $q = –7070$ Вт/м^2.

Таблица 2 – Зависимость идентифицированных f и q от погрешности эксперимента

δ	f	q
0,01	134,999	–7069,945
0,05	134,994	–7069,899
0,1	134,988	–7069,808
0,15	135,011	–7070,326

Зависимости максимального напряжения от теплового потока на границе или от мощности источников тепла приведены на рис. 1, рис. 2. Что касается аналогичной зависимости от коэффициента теплоотдачи $\alpha_т$, то она представлена на рис. 3.

При идентификации $\alpha_т$ использовалась та же описанная выше процедура минимизации функционала А. Н. Тихонова, но с аппроксимацией зависимости $\sigma(\alpha_т)$, полученной численно путем решения прямой задачи.

Резюме. Тщательный анализ результатов проведенного многофакторного эксперимента дает возможность констатировать, что предложенный подход позволяет, не доводя объект исследования до разрушения, определить нагрузку, при которой он будет разрушен.

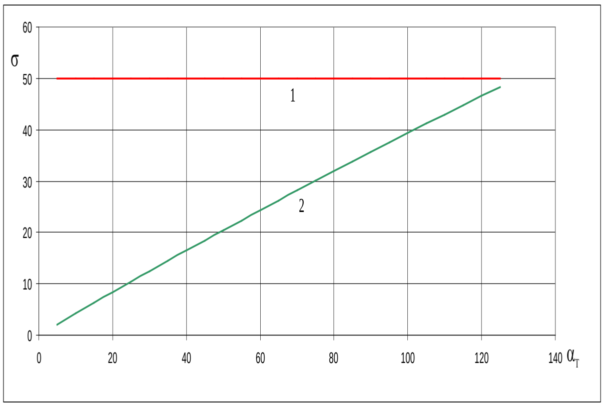

Рис. 3. Зависимость максимальных напряжений от коэффициента теплоотдачи внутренней поверхности цилиндра:
$1 - \sigma_в$; $2 - \sigma_{max}$

Список литературы

1. Бурак Я. Й., Гачкевич О. Р., Терпецкий Р. Ф. Термомеханика тел низкой электропроводности при электромагнитном излучении инфракрасного диапазона частот. *Доклады АН УССР. Сер.: А*. 1990. № 6. С. 39–43.
2. Вигак В. М., Юзвяк М. Я., Ясинский А. В. Решение плоской термоупругой задачи для прямоугольной плиты. *Журнал температурных напряжений*. 1998. Т. 21. С. 545–561.
3. Boley B., Weiner J. *Theory of thermal stresses*. New York, London: John Wiley and Sons, 1960. 512 p.
4. Tanigawa H., Komatsubara Y. Thermal stress analysis of a rectangular plate and its thermal stress intensity factor for compressive stress field. *Journal of Thermal Stresses*. 1997. Vol. 20. P. 517–542.
5. Ватульян А. О. *Обратные задачи в механике деформированного тела*. Москва: Физматгиз, 2007. 223 с.
6. Мацевитый Ю. М., Постольник Ю. С., Повгородний В. О. Обратные задачи термомеханики. *Проблемы машиностроения*. 2008. Т. 11, № 3. С. 30–37.
7. Тихонов А. Н. Обратные задачи теплопроводности. *Инженерно-физический журнал*. 1975. Т. 29, № 1. С. 7–12.
8. Ranjana G., Khobragade N. W. Deflection of a thick rectangular plate. *Canadian Journal on Science and Engineering Mathematics Research*. 2012. Vol. 3, no. 2. P. 61–64.
9. Roy R., Bagade S. H., Khobragade N. W. Thermal stresses of a semi infinite rectangular beam. *International Journal of Engineering and Innovative Technology*. 2013. Vol. 3, iss. 1. P. 442–445.
10. Shalu D., Barai M. S., Khobragade N. W. Inverse steady-state thermoelastic problems of Semi-Infinite rectangular plate. *International Journal of Latest Technology in Engineering, Management & Applied Science*. 2018. Vol. VII, iss. II. P. 1–6.
11. Shalu D., Barai M., Warbhe S., Khobragade N. W. Inverse Transient thermoelastic problem of Semi-Infinite rectangular plate. *International Journal of Latest Technology in Engineering, Management & Applied Science*. 2018. Vol. VII, iss. II. P. 11–15.
12. Singru S. S., Khobragade N. W. Thermal stress analysis of a thin rectangular plate with internal heat source. *International Journal of Latest Technology in Engineering, Management & Applied Science*. 2017. Vol. VI, iss. III. P. 31–33.
13. Singru S. S., Khobragade N. W. Thermal stresses of a semi-infinite rectangular slab with internal heat generation. *International Journal of Latest Technology in Engineering, Management & Applied Science*. 2017. Vol. VI, iss. III. P. 26–28.
14. Sutar C. S., Khobragade N. W. An inverse thermoelastic problem of heat conduction with internal heat generation for the rectangular plate. *Canadian Journal of Science & Engineering Mathematics*. 2012. Vol. 3, no. 5. P. 198–201.
15. Dange W. K., Khobragade N. W., Durge M. H. Three dimensional

inverse transient thermoelastic problem of a thin rectangular plate. *International Journal of Applied Maths*. 2010. Vol. 23, no. 2. P. 207–222.
16. Тимошенко С. П. *Теория упругости.* Москва: Наука, 1979. 560 с.
17. Коваленко А. Д. *Термоупругость.* Киев: Высшая школа, 1975. 216 с.
18. Тихонов А. Н., Арсенин В. Я. *Методы решения некорректных задач.* Москва: Наука, 1979. 288 с.
19. Мацевитый Ю. М. *Обратные задачи теплопроводности.* Киев: Наукова думка, 2002–2003. Т. 1: Методология. 408 с. Т. 2: Приложения. 392 с.
20. Мацевитый Ю. М., Сафонов Н. А., Ганчин В. В. К решению нелинейных обратных граничных задач теплопроводности. *Проблемы машиностроения.* 2016. Т. 19, № 1. С. 28–36.

References (transliterated)

1. Burak Ya. Y., Gachkevich O. R., Terpetskiy R. F. Termomekhanika tel nizkoy elektroprovodnosti pri elektromagnitnom izluchenii infrakrasnogo diapazona chastot [Thermechanics of bodies of low electrical conductivity with electromagnetic radiation of the intrared frequency range]. *Doklady AN USSR. Seriya: A.* 1990, no. 6, pp. 39–43.
2. Vigak V. M., Yuzvyak M. Ya., Yasinskiy A. V. Reshenie ploskoy termouprugoy zadachi dlya pryamougol'noy plity [The solution of the plane thermoelasticity problem for a rectangular domain]. *Zhurnal temperaturnykh napryazheniy*, 1998, vol. 21, pp. 545–561.
3. Boley B., Weiner J. *Theory of thermal stresses.* New York, London, John Wiley and Sons Publ., 1960. 512 p.
4. Tanigawa H., Komatsubara Y. Thermal stress analysis of a rectangular plate and its thermal stress intensity factor for compressive stress field. *Journal of Thermal Stresses*. 1997, vol. 20, pp. 517–542.
5. Vatul'yan A. O. *Obratnye zadachi v mekhanike deformirovannogo tela* [Inverse problems in the mechanics of a deformable solid]. Moskow, Fizmatgiz Publ., 2007. 223 p.
6. Matsevityy Yu. M., Postol'nik Yu. S., Povgorodniy V. O. Obratnye zadachi termomekhaniki [Inverse problems of thermomechanics]. *Problemy mashinostroeniya*. 2008, vol. 11, no. 3, pp. 30–37.
7. Tikhonov A. N. Obratnye zadachi teploprovodnosti [Inverse problems of heat conductivity]. *Inzhenerno-fizicheskiy zhurnal*. 1975, vol. 29, no. 1, pp. 7–12.
8. Ranjana G., Khobragade N. W. Deflection of a thick rectangular plate. *Canadian Journal on Science and Engineering Mathematics Research*. 2012, vol. 3, no. 2, pp. 61–64.
9. Roy R., Bagade S. H., Khobragade N. W. Thermal stresses of a semi infinite rectangular beam. *International Journal of Engineering and Innovative Technology*. 2013, vol. 3, issue 1, pp. 442–445.
10. Shalu D., Barai M. S., Khobragade N. W. Inverse steady-state thermoelastic problems of Semi-Infinite rectangular plate. *International Journal of Latest Technology in Engineering, Management & Applied Science*. 2018, vol. VII, issue II, pp. 1–6.
11. Shalu D., Barai M., Warbhe S., Khobragade N. W. Inverse Transient thermoelastic problem of Semi-Infinite rectangular plate. *International Journal of Latest Technology in Engineering, Management & Applied Science*. 2018, vol. VII, issue II, pp. 11–15.
12. Singru S. S., Khobragade N. W. Thermal stress analysis of a thin rectangular plate with internal heat source. *International Journal of Latest Technology in Engineering, Management & Applied Science*. 2017, vol. VI, issue III, pp. 31–33.
13. Singru S. S., Khobragade N. W. Thermal stresses of a semi-infinite rectangular slab with internal heat generation. *International Journal of Latest Technology in Engineering, Management & Applied Science*. 2017, vol. VI, issue III, pp. 26–28.
14. Sutar C. S., Khobragade N. W. An inverse thermoelastic problem of heat conduction with internal heat generation for the rectangular plate. *Canadian Journal of Science & Engineering Mathematics*. 2012, vol. 3, no. 5, pp. 198–201.
15. Dange W. K., Khobragade N. W., Durge M. H. Three dimensional inverse transient thermoelastic problem of a thin rectangular plate. *International Journal of Applied Maths*. 2010, vol. 23, no. 2, pp. 207–222.
16. Timoshenko S. P. *Teoriya uprugosti* [Theory of Elasticity]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 560 p.
17. Kovalenko A. D. *Termouprugost'* [Thermoelasticity]. Kiev, Vysshaya shkola Publ., 1975. 216 p.
18. Tikhonov A. N., Arsenin V. Ya. *Metody resheniya nekorrektnykh zadach* [Methods for solving non-correct problems]. Moscow, Nauka Publ., 1979. 288 p.
19. Matsevityy Yu. M. *Obratnye zadachi teploprovodnosti* [Inverse problems of heat conductivity]. Kiev, Naukova dumka Publ., 2002–2003, vol. 1: Metodologiya [Methodology], 408 p.; vol. 2: Prilozheniya [Applications], 392 p.
20. Matsevityy Yu. M., Safonov N. A., Ganchin V. V. K resheniyu nelineynykh obratnykh granichnykh zadach teploprovodnosti [To the solution of nonlinear inverse boundary-value problems of heat conduction]. *Problemy mashinostroeniya*. 2016, vol. 19, no. 1, pp. 28–36.

Поступила (received) 19.06.2020

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Мацевитий Юрій Михайлович (***Мацевитый Юрий Михайлович***, ***Matsevity Yurii***) – доктор технічних наук, професор, академік НАН України, ІПМаш ім. А. М. Підгорного НАН України, завідувач відділу моделювання та ідентифікації теплових процесів; м. Харків, Україна; ORCID: http://orcid.org/0000-0002-6127-0341; e-mail: matsevit@ipmach.kharkov.ua

Повгородній Володимир Олегович (***Повгородний Владимир Олегович***, ***Povhorodnii Volodymyr***) – кандидат технічних наук, доцент, Національний аерокосмічний університет ім. М. Є. Жуковського «Харківський авіаційний інститут», доцент кафедри «Теоретична механіка, машинознавство та роботомеханічні системи»; м. Харків, Україна; ORCID: http://orcid.org/0000-0003-1640-1004; e-mail: povgorod@ukr.net

Сафонов Микола Олександрович (***Сафонов Николай Александрович***, ***Safonov Mykola***) – кандидат фізико-математичних наук, старший науковий співробітник, ІПМаш ім. А. М. Підгорного НАН України, старший науковий співробітник відділу моделювання та ідентифікації теплових процесів; м. Харків, Україна; ORCID: http://orcid.org/0000-0002-3951-4805; e-mail: nicksaf@meta.ua