

**Ю. М. КУХТЕНКОВ****МЕТОДИКИ ПРОГНОЗУВАННЯ НИЗЬКОЧАСТОТНИХ ПУЛЬСАЦІЙ ТИСКУ У ВІДСМОКТУЮЧІЙ ТРУБІ ГІДРОТУРБИНИ**

Наведено порівняння сучасних методик розрахунку низькочастотних джгутових пульсацій тиску у відсмоктуючій трубі з експериментом. Вібращі у проточній частині жорстколопатевої гідротурбін суттєво залежать від пульсацій тиску, які обумовлені рухом вихрових джгутів за робочими колесами у відсмоктуючій трубі. Силова взаємодія вихорів з елементами проточного тракту може призвести до серйозних аварій. Розглянуто зменшення низькочастотних пульсацій тиску, що сприяє підвищенню надійності і збільшення потужності гідроагрегатів. У більшості, вихрові джгути мають складну просторову гвинтову форму, тому для розрахунку пульсацій тиску треба використовувати просторові математичні моделі. Це можуть бути сучасні пакети програм гідродинаміки, які вирішують завдання механіки суцільного середовища і використовують рівняння Рейнольдса. Процес вирішення завдань в цьому випадку здійснюється за допомогою пакету прикладних програм CFD, що включає етапи: створення тривимірної моделі розглянутого об'єкта за допомогою системи САПР; побудова розрахункової сітки; вибір математичної моделі турбулентності; завдання граничних умов. З іншого боку, це можуть бути простіші моделі для невязкої рідини, що розглядаються у квазістационарній постановці. Наприклад, коли стінка відсмоктуючої труби моделюється вихровою поверхнею, що складається з тонких вихрових шнурів змінної інтенсивності, що мають форму спіралі. Швидкості, індуковані джгутами, розраховуються за формулами Кочина М. Є.; швидкості, індуковані вихровою поверхнею визначаються з граничних умов з рішення рівняння Фредгольма, а амплітуди пульсацій тиску визначаються на основі інтеграла Бернуллі. У першому випадку для виконання задачі потрібні значні ресурси машинного часу, а похибка при розрахунку амплітуд пульсацій тиску становить до 10 % в порівнянні з експериментальними даними, у другому – 15–20 % при меншому часі розрахунків. Результати розрахунків джгутових пульсацій тиску використовуються в розрахунках на міцність елементів проточної частини гідротурбіни з великими запасами по коефіцієнтам міцності, тому можливе використання в прогнозних розрахунках джгутових пульсацій тиску і більш простих моделей.

**Ключові слова:** гідротурбіна, робоче колесо, відсмоктуюча труба, математична модель, вихровий джгут, пульсації тиску.

**Ю. М. КУХТЕНКОВ****МЕТОДИКИ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ НИЗКОЧАСТОТНЫХ ПУЛЬСАЦИЙ ДАВЛЕНИЯ В ОТСАСЫВАЮЩЕЙ ТРУБЕ ГИДРОТУРБИНЫ**

Приведено сравнение современных методик расчета низкочастотных жгутовых пульсаций давления в отсасывающей трубе с экспериментом. Вибрации в проточной части жестколопастных гидротурбин существенно зависят от пульсаций давления, которые обусловлены движением вихревых жгутов за рабочими колесами в отсасывающих трубах. Силовое взаимодействие вихрей с элементами проточного тракта может привести к серьезным авариям. Рассмотрено уменьшение низкочастотных пульсаций давления, что способствует повышению надежности и увеличения мощности гидроагрегатив. В большинстве, вихревые жгуты имеют сложную пространственную винтовую форму, поэтому для расчета пульсаций давления надо использовать пространственные математические модели. Это могут быть современные пакеты программ гидродинамики, решающие задачи механики сплошной среды и использующие уравнения Рейнольдса. Процесс решения задач в этом случае происходит с помощью пакета прикладных программ CFD, включающих этапы: создание трехмерной модели рассматриваемого объекта с помощью системы САПР; построение расчетной сетки; выбор математической модели турбулентности; задания граничных условий. С другой стороны, это могут быть более простые модели для невязкой жидкости в квазистационарной постановке. Например, когда стенка отсасывающей трубы моделируется вихровой поверхностью, состоящей из тонких вихревых шнуров переменной интенсивности, имеющих форму спиралей. Скорости, индуцированные основными жгутами, рассчитываются по формулам Кочина М. Е., а скорости, индуцируемые вихревой поверхностью определяются из граничных условий из решения уравнения Фредгольма; амплитуды пульсации давления определяются на основе интеграла Бернуллі. В первом случае для решения задачи требуются значительные ресурсы машинного времени, а погрешность при расчете пульсаций давления составляет до 10 % по сравнению с экспериментальными данными, во втором – 15–20 % при меньшем времени расчетов. Результаты расчетов жгутовых пульсаций давления используются в расчетах на прочность элементов проточной части гидротурбины с большими запасами по коэффициентам прочности, поэтому возможно использование в прогнозных расчетах жгутовых пульсаций давления и более простых моделей.

**Ключевые слова:** гидротурбина, рабочее колесо, отсасывающая труба, математическая модель, вихревой жгут, пульсации давления.

**Yu. KUKHTENKOV****METHODS FOR FORECASTING LOW-FREQUENCY PULSATIONS OF PRESSURE PULSATIONS IN THE DRAFT TUBE OF A HYDRAULIC TURBINE**

A comparison of modern methods for calculating low-frequency rope pulsations of pressure in a suction pipe with experiment is given. Vibrations in the flow path of rigid-blade hydraulic turbines significantly depend on pressure pulsations, which are caused by the movement of vortex swirls behind the impellers in the draft tube. Forceful interaction of vortices with elements of the flow path can lead to serious accidents. A decrease in low-frequency pressure pulsations is considered, which contributes to an increase in reliability and an increase in the power of hydraulic units. Most of these vortex swirls have a complex spatial helical shape, therefore, for calculating pressure pulsations it is necessary to use spatial mathematical models. These can be modern hydrodynamics software packages that solve the problems of continuum mechanics and use the Reynolds equations. The process of solving problems in this case using the CFD application package, which includes the stages: creating a three-dimensional model of the object under consideration using a CAD system; construction of a computational grid; choice of turbulence model; setting boundary conditions. On the other hand, these can be simpler models for an inviscid fluid in a quasi-stationary setting. For example, when the wall of the draft tube is modeled by a vortex surface, consisting of thin vortex cords of variable intensity, having the shape of a spiral. The velocities induced by the main swirls are calculated by the formulas of M. E. Kochin, and the velocities induced by the vortex surface are determined from the boundary conditions from the solution of the Fredholm equation; pressure pulsation amplitudes are determined based on the Bernoulli integral. In the first case, solving the problem requires significant resources of computer time, and the error in calculating pressure pulsations is up to 10 % compared to the experimental data, in the

© Ю. М. Кухтенков, 2020

second – 15–20 % with a shorter calculation time. The results of calculating rope pulsations of pressure are used in strength calculations of the elements of the flow path of a hydraulic turbine with large safety factors, therefore, it is possible to use in calculations of pulsations of pressure and simpler models.

**Keywords:** hydraulic turbine, impeller, draft tube, mathematical model, vortex swirls, low-frequency pressure pulsations.

**Вступ.** Важливою задачею ГЕС є регулювання потужності в енергетичній системі. При зміні навантаження гідроагрегати неодноразово проходять через нерозраховані режими роботи. З нестійкістю закрученої течії пов'язане виникнення інтенсивних низькочастотних гідродинамічних пульсацій, що становлять загрозу надійності конструкцій турбіни. Підвищення стійкості роботи, збільшення ККД гідромашин неможливо без вивчення фізичних механізмів гідродинамічних процесів, істотну роль серед яких відіграють нестационарні явища, пов'язані з утворенням великомасштабних вихрових структур. Одним з механізмів генерації пульсацій потоку є прецесія вихрового джгута (ВД), що утворюється за робочим колесом (РК) гідротурбіни в режимах недовантаження або перевантаження роботи гідротурбіни, коли потік після проходження через гідротурбіну має досить велику закрутку. Прецесія ВД є серйозною небезпекою для гідротурбін в зв'язку з потужними вібраціями потоку, які призводять до сильної вібрації гідротурбіни і в разі резонансу можуть привести до руйнування обладнання. Для прогнозування резонансних явищ і пошуку методів зменшення нестійкості необхідна інформація про пульсаційні характеристики.

З розвитком методів математичного моделювання і широким впровадженням в інженерну практику ЕОМ з'явилася можливість заміни фізичного експерименту чисельним. Розвиток комп'ютерної техніки зробило можливим застосування сучасних методів обчислювальної гідродинаміки до опису турбулентних течій в просторових геометрично складних об'єктах, таких як протокова частина гідротурбіни. Останнім часом з'явилася велика кількість робіт, в яких в тривимірній постановці проведені розрахунки різних процесів в гідротурбінах [1–10]. Серед зарубіжних дослідників можна відзначити роботи Doerfler P., Ruprecht A., роботи співробітників інституту теплофізики СВ РАН Росії [2], які внесли вагомий вклад у розвиток методів обчислювального моделювання стосовно гідротурбін. Отримано добре узгодження розрахункових і експериментальних даних. Виявлена сильна нерівномірність потоку за коліном відсмоктуючої труби (ВТ), яка сильно знижує пропускну здатність ВТ. В роботі [3] було проведено чисельне моделювання течії в ВТ з використанням різних моделей турбулентності. Показано, що широко використана модель k-ε не відображує мінімуми тиску в коліні ВТ. За підсумками проведеного дослідження найкращі результати продемонструвала модель k-ω SST, яка дозволяє отримати коректний розподіл тиску. В роботі [5] представлені результати моделювання нестационарної течії у ВТ гідротурбіні РО230. Проведене зіставлення результатів розрахунку з експериментальними даними показує прийнятну згоду розрахунку і експерименту, як по локальних

характеристикам течії (профілі швидкості, розподіл тиску у ВТ), так і за інтегральними характеристиками роботи турбіни (ККД, витрата води через турбіну). Таким чином, чисельне моделювання дає нові можливості, оскільки дозволяє проаналізувати структуру течії і на основі цього спрогнозувати пульсаційні характеристики.

У практичних розрахунках пульсацій тиску (ПТ) у ВТ гідротурбін поряд з вищевказаними підходами використовуються просторові моделі розрахунку ВД для нев'язкої рідини в яких час розрахунку прогнозних пульсаційних характеристик значно менше і їх результати можуть використовуватися у розрахунках на міцність елементів проточної частини гідротурбіни [11–14].

**Метою досліджень** було порівняння сучасних методик розрахунку низькочастотних джгутових ПТ у ВТ жорстколопатевої гідротурбіни з даними експериментів, тобто продемонструвати можливості сучасного чисельного моделювання.

**Розрахунки джгутових ПТ у ВТ гідротурбін на основі пакетів програм CFD. Математичні моделі.** При описі течій в гідротурбіні доводиться стикатися з проблемами: з необхідністю моделювання турбулентності в каналах складної геометричної форми і сильної закрутки потоку. Для цього потрібні моделі турбулентності, що описують великомасштабні пульсації потоку. Широке поширення, в інженерних розрахунках k-ε і k-ω моделі турбулентності погано описують такі течії. Щоб поліпшити моделювання турбулентних закручених течій намагаються модифікувати URANS моделі турбулентності і використовувати методи в яких вирішуються великомасштабні турбулентні вихори (LES, DES). Для моделювання цього явища необхідно застосовувати нестационарні, вихрові методи – метод моделювання великих вихорів (Large Eddy Simulation – LES), при цьому необхідна детальна сітка поблизу стінок. RANS моделі економічні і добре описують прикордонні шари. В роботі [8] був запропонований метод відокремлених вихорів (DES). При моделюванні гідротурбін необхідно враховувати обертання РК і взаємодії ротора-статора. Поширеним і простим способом моделювання обертання РК є використання обертової системи координат. Перехід у обертову систему дозволяє моделювати течії в наближенні, при якому РК нерухомо, а рідина натікає на нього – «загальмоване колесо». Проведені численні тестові розрахунки [2–4], що вказують на гідність такого підходу.

Нижче наведені рівняння математичної моделі, що виражають закони збереження у обертовій системі координат. Рівняння нерозривності (закон збереження маси):

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla(\rho V) = 0.$$

Рівняння кількості руху (закон збереження імпульсу) для відносних швидкостей:

$$\frac{\partial \rho V}{\partial t} + \nabla(\rho V V) = -\nabla P + \nabla(\tau^m + \tau^t) + (\rho - \rho_0)g + \rho(2\Omega_x \cdot V + \Omega \cdot (\Omega \cdot r))$$

де  $V$  – вектор швидкості рідини;  $\tau$  – тензор в'язких напружень;  $\Omega$  – вектор кутової швидкості обертання РК;  $P$  – статичний тиск;  $\rho$  – щільність.

При переході в обертову систему координат в правій частині рівняння збереження імпульсу записуються сила Коріоліса і відцентрова сила. Складові тензора в'язких напруг  $\tau^m$  визначаються як

$$\tau_{ij}^m = \mu \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{\partial u_k}{\partial x_k} \right],$$

де  $\mu$  – динамічна (молекулярна) в'язкість;  $u_i$  – компоненти вектора швидкості;  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера.

При побудові двопараметричних моделей турбулентності для визначення компонент тензора Рейнольдсових напруг  $\tau^2$  використовують гіпотезу Буссінеска про ізотропність турбулентної в'язкості:

$$\rho \bar{v} \bar{v}' = \mu_t \left[ \left( \frac{\partial u_i}{\partial x_j} + \frac{\partial u_j}{\partial x_i} \right) - \frac{2}{3} \delta_{ij} (\rho k + \mu_t \frac{\partial u_k}{\partial x_k}) \delta_{ij} \right]$$

де  $\mu_t$  – турбулентна в'язкість;  $k$  – кінетична енергія турбулентних пульсацій.

Метод DES поєднує підходи RANS і LES. В областях потоку, де розмір обчислювальної сітки  $D$  достатній для вирішення енергонесущих вихорів, тобто при  $\Delta \leq L_t$  застосовується метод LES, а в решті області –  $\frac{3}{4}$  RANS. При моделюванні відокремлених вихорів цей характерний масштаб турбулентності замінюється функцією  $L_t = \min(d, C_{des} \Delta)$ , де  $C_{des}$  – константа, а  $d$  визначається, як максимальний з трьох розмірів контрольного обсягу  $\Delta_x, \Delta_y, \Delta_z$ . Таким чином, в прикордонних шарах працюють RANS моделі, а в решті області – LES. У роботі [6] використовується DES – метод, заснований на  $k-\omega$  SST моделі Ментера [8] і обмежений турбулентною в'язкістю:  $\bar{\mu}_t = \mu_t / F_{des}$ ,  $F_{des} = \max(L_t / C_{des} \Delta, 1)$ ,  $L_t = k^{1.5} / \varepsilon$ ,  $C_{des} = 0,61$ .

Проведені тестові розрахунки показали, що дана методика за прийнятні часи розрахунку дозволяє достовірно розглянути великомасштабні турбулентні пульсації у всьому тракті гідротурбіни і оцінити їх амплітудно-частотні характеристики [2–4]. Дискретизація рівнянь переносу здійснювалася за методом контрольного обсягу на неструктурованій сітці. Зв'язок полів швидкості і тиску для нестисливої рідини реалізувався за допомогою процедури SIMPLEC. Для апроксимації конвективних членів рівняння для компоненти імпульсу використовувалася схема Quick. Нестационарні і дифузійні складові апроксимувались по схемі 2-го порядку точності.

*Порівняння розрахунків з експериментом.*

Розрахунки низькочастотних ПТ були проведені для РО гідротурбіни високонапірної ГЕС ( $N = 340$  МВт,  $H = 120$  м), частота обертання РК  $n = 2,08$  Гц. Для

розрахунків виконувалась геометрія, що представляла точну копію гідроагрегату, яка включала в себе всі основні вузли турбіни – спіральну камеру (СК), напрямний апарат (НА), РК, ВТ, за винятком підвідного водоводу [6].

Для даної геометрії була побудована неструктурована розрахункова сітка. Загальна деталізація розрахункової сітки склала 4,1 млн вузлів, яка була згущена в області лопаті РК і лопаток НА. Попередньо були проведені методичні розрахунки, які показали, що такої деталізації розрахункової сітки досить для отримання прийнятних по точності результатів.

Для даної геометрії були проведені розрахунки нестационарної течії для значень відкриття направляючого апарату в діапазоні від  $a_0 = 100$  мм до 550 мм. Повний напір задавався рівним  $H = 113$  м. Частота обертання РК –  $125$  хв<sup>-1</sup>. Розрахунки проведені в однофазній постановці – кавітація і наявність повітря не враховувалися. Граничні умови ставилися на вході в СК гідроагрегату. При цьому на вході задавалося умова фіксованого повного напору. Розрахункові значення інтегральних характеристик були отримані усередненням нестационарних величин за часом. Експериментальні дані були отримані в ході випробувань на модельному гідравлічному стенді і перераховані на натурні параметри. Розбіжність розрахунку і вимірювань по витраті не перевищувала 0,3 %, за проектною потужністю 0,5 % і по ККД 0,9 % у всьому діапазоні  $a_0$ . Крім інтегральних характеристик течії для аналізу пульсаційних характеристик течії великий інтерес представляє поведінка структури течії в турбіні при різних режимах роботи. На рис. 1. показана типова вихрова структура течії за РК при різних відкриттях  $a_0$  НА гідроагрегату. Структура течії показана за допомогою ізоповверхонь тиску.

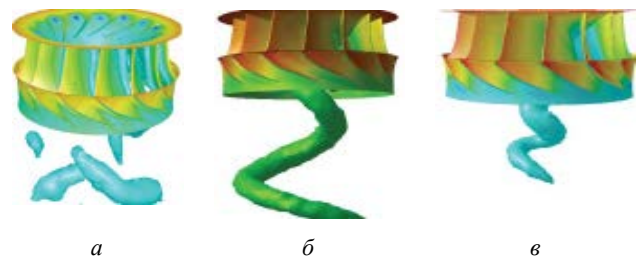


Рис. 1. Вихрова структура течії у гідротурбіні при:  
а –  $a_0 = 150$  мм; б –  $a_0 = 300$  мм; в –  $a_0 = 390$  мм

При малих відкриттях НА (рис. 1, а) в міжлопатевих каналах РК формуються вихори, які зриваються з вихідних кромки. При великих відкриттях НА (рис. 1, б) межлопатеві вихори в РК не утворюються. При цьому вихор за РК навпаки досягає максимальних розмірів, доходячи до поворотного коліна ВТ, викликаючи не тільки синхронні, але і асинхронні коливання потоку. На оптимальному режимі роботи гідротурбіни (рис. 1, в) радіус пресеції вихору зменшується практично до нуля.

Порівняння з натурними даними по амплітудам і частотам ПТ проведено для точки на стінці дифузора ВТ, на відстані 2,6 м від нижнього краю РК для

декількох характерних режимів.

Для порівняння з результатами розрахунку також проведені натурні вимірювання ПТ для даного агрегату ГЕС. В цілому поведінка залежності амплітуд ПТ від  $a_0$  НА в повній мірі відображує ті процеси, про які йшлося під час аналізу структури потоку і спектрів. Це зростання ПТ зі збільшенням  $a_0$ . Далі невеликий провал, пов'язаний з перебудовою течії. Після нього максимум ПТ в режимах з максимальними амплітудами вихору, що прецесує. І далі монотонне зниження інтенсивності ПТ при подальшому зростанні  $a_0$  НА. Порівняння натурних вимірювань з розрахунковими показує, що розрахункові дані задовільно описують поведінку ПТ у ВТ в широкому діапазоні  $a_0$  НА. Значення ПТ узгоджуються з натурними вимірами з похибкою близько 10 %.

На кафедрі «Гідравлічні машини» НТУ «ХПИ» розроблено методику для розрахунку джерел пульсації тиску у відсмоктуючій трубі. Просторова математична модель розрахунку ПТ у ВТ гідротурбіни від довільного числа фізичних ВД рівної інтенсивності з рівним кроком ставилася та була вирішена на основі узагальнення існуючих підходів і проведених експериментальних досліджень [11–14].

Стінка ВТ в цьому випадку моделюється вихровою поверхнею, яка складається з нескінченно великого числа тонких ВД шнурів змінної інтенсивності з кроком рівним кроку фізичних ВД, які мають форму гвинтової спіралі, або поверхнею джерел. Завдання розглядається у квазістаціонарній постановці, рідина вважається нев'язкою. Потік поза вихором при визначенні індукційованих швидкостей приймається потенціальним. Урахований також додатковий осесиметричний потік, що обумовлений проходженням рідини через РК. Завдання зводиться до пошуку швидкостей у будь-якій точці ВТ.

Важливим моментом для розрахунку ПТ була підготовка геометричних параметрів ВД. Вона здійснювалася на основі апроксимації даних, що були одержані з візуальних експериментів з фотографуванням ВД і з використанням датчика-зонда тиску на експериментальних стендах «Турбоатома» для випробування модельних гідротурбін.

Для ВД гідротурбін на основі експериментів були одержані поліномні залежності геометричних параметрів ВД: відносного ексцентриситету –  $\bar{e}$ , відносного діаметра –  $\bar{d}_ж$ , а також кута нахилу вихрової лінії –  $\beta_ж$  у полі універсальної пульсаційної характеристики у вигляді:

$$\left. \begin{aligned} \bar{e}(n'_1, Q'_1) &= A_0 + A_1 Q'_1 + A_2 Q_1'^2 \\ \bar{d}_ж(n'_1, Q'_1) &= B_0 + B_1 Q'_1 + B_2 Q_1'^2 \\ \beta_ж(n'_1, Q'_1) &= 90^\circ(1 - C_1 Q'_1 + C_2 Q_2'^2 + C_3 Q_3'^3) \end{aligned} \right\}$$

де  $A_1, A_2, A_3, B_1, B_2, B_3, C_1, C_2, C_3$  – змінні коефіцієнти, що є поліномами від  $n'_1$ .

Параметри  $\bar{e}, \bar{d}_ж, \beta_ж$  могли бути також визначені за допомогою приблизних емпіричних залежностей

типу:

$$\bar{e} = (4(|\bar{Q}'_1 - \bar{n}'_1| \bar{Q}'_1 + 1) / (4 + |\bar{Q}'_1 - \bar{n}'_1| \bar{Q}'_1)),$$

$$\beta_ж = 90(1 - k\sqrt{\bar{e}}),$$

де  $k = 0,7-0,9$ , які теж були одержані на основі модельних експериментів для гідротурбін РО115–170.

Визначення циркуляції за РК здійснювалося на основі спрощеної осередненої осесиметричної задачі з урахуванням робіт І. Етінберга і Б. Гольдіна [15]. Це дало можливість розраховувати інтенсивність ВД з урахуванням геометрії вихідної кромки лопаті через циркуляцію у втулкових перетинах РК. Проведене порівняння циркуляції, що була здобута на основі розрахунків, з циркуляцією, що була здобута із зондових випробувань, свідчить про задовільне їхнє узгодження.

Розрахунки по оптимізації функції інтенсивності вихрової поверхні ВТ  $\gamma(a_2)$ . Для знаходження інтенсивності вихрової поверхні ВТ  $\gamma(a_2)$  у розрахунковому перетині пропонується її модель у вигляді усіченого ряду Фур'є. Ступінь усікання полягає в обмеженому числі членів цього ряду до  $n = 10$  гармонік. Із граничних умов «непротікання», записаних для ряду точок поперечного перерізу ВТ у розрахунковому перетині, складена переповнена система лінійних алгебраїчних рівнянь (СЛАР) в матричному виді. Вона записується у вигляді  $A\bar{x} = \bar{b}$ , де  $\bar{x}$  – вектор невідомих коефіцієнтів Фур'є. Метод найменших квадратів (МНК) приводить до узагальненої системи  $\tilde{A}Ax = \tilde{A}b$ , де  $\tilde{A}$  – транспонована матриця, а  $\tilde{A}A$  – квадратна матриця розмірності  $2n \times 2n$ , незалежно від того, як сильно була перевизначена система.

Знайдений із цієї системи узагальнений розв'язок не обов'язково повинен задовольняти першій системі через неточність вихідних даних, а саме коефіцієнтів матриці  $A$  і вільних членів  $b$ . Крім того, виникають при введенні інформації в машину погрішності перекладу з однієї системи вирахування в іншу, обчислення елементарних функцій, використання обчислювальних алгоритмів, оскільки всі обчислення проводяться з округленням. Тому завжди виходить наближений розв'язок  $x$ , точність якого нас може не влаштовувати.

Тоді  $\bar{x} = \bar{x}_1 + \bar{z}$ , де  $\bar{z}$  – уточнення розв'язку, а  $\bar{x}_1$  – перше наближення до розв'язку, тоді маємо  $A(\bar{x}_1 + \bar{z}) = \bar{b}$  і при цьому  $A\bar{x}_1 + A\bar{z} = \bar{b}$ , звідки  $A\bar{z} = \bar{b} - A\bar{x}_1$ , де розбіжність між правою частиною  $\bar{b}$  і наближеною лівою частиною  $A\bar{x}_1$ , назовемо нев'язкою наближеного розв'язку  $\bar{x}$ , точніше вектор-нев'язкою і позначимо цей вектор  $\bar{r}_1$ . Тоді замість вихідного рівняння будемо мати рівняння для уточнення до наближеного розв'язку  $A\bar{z} = \bar{r}_1$ . Оскільки звичайно модуль  $\bar{r}_1$  набагато менше модуля правої частини  $\bar{b}$ , то отримане нове рівняння вдається розв'язати вже з більш високою абсолютною точністю, тому відносна

точність наближеного розв'язку  $\bar{x}_1$  повинна підвищуватися [16].

Апроксимація розв'язку СЛАР МНК з вагами [17].

При уточненні розв'язку системи  $A\bar{x} = \bar{b}$  не всі нев'язки однаково рівнозначні. Щоб зрівняти вагомість нев'язок для МНК, необхідно користуватися цим методом з урахуванням ваги точок даних. Замість

того щоб вирішувати завдання  $\min_x \sum_{i=1}^p (\bar{b} - A\bar{x})_i^2$ ,

щодо параметрів  $x$ , ми будемо вирішувати завдання

$\min_x \sum_{i=1}^p w_i (\bar{b} - A\bar{x})_i^2$ , де  $w_i$  – вага, що відбиває

важливість точок даних, тобто кожній нев'язці можна приписати її вагу. Якщо помилка  $i$ -го рівняння  $e_i$ , то вибираємо  $w_i = 1/e_i^2$ . Усі програми, використовувані для розв'язку незваженої задачі методу МНК, можна використовувати для розв'язку зважених завдань. Для цієї мети необхідно зробити масштабування правої частини системи  $\bar{b}$  й матриці коефіцієнтів  $A$ . Для цієї мети потрібно кожний рядок матриці  $A$  і рядок вектора  $\bar{b}$  помножити на вагу  $w_i$ , а потім розв'язати завдання мінімізації

$$\min_x \sum_{i=1}^p (\bar{b}_w - A_w \bar{x})_i^2 = \min_x (\bar{b} - A\bar{x})^T \bar{w} (\bar{b} - A\bar{x}) .$$

Так вага  $w_i$  була взята зворотною величиною квадрата нев'язки для кожного  $i$  рядка системи,  $w_i = 1 / (b_i - \sum_{j=1}^{2n} A_{i,j} x_j)^2$ , де  $i$  – фіксується й міняється від 1 до  $p$ , а  $j$  від 1 до  $2n$ , де  $n$  – число гармонік,  $p$  – число рівнянь.

Замість вихідної системи  $A\bar{x} = \bar{b}$  необхідно вирішувати систему  $A_w \bar{x} = \bar{b}_w$  зі зваженими на нев'язки коефіцієнтами. Метод МНК із вагами був реалізований програмно мовою Фортрана і отримана пульсаційна характеристика для модельної турбіни РО230 рис. 2. Тоді коефіцієнти в новій системі будуть визначатися з вагами:

$$w_i = 1/e_i^2, (b_w)_i = b_i / (b_i - \sum_{j=1}^{2n} A_{i,j} x_j)^2 ,$$

$$(A_w)_i = A_{i,j} / (b_i - \sum_{j=1}^{2n} A_{i,j} x_j)^2 .$$

Розв'язок системи  $A\bar{x} = \bar{b}$  рівносильний відшуканню мінімуму квадрата нев'язки  $|A\bar{x} - \bar{b}|$ ,

тобто мінімуму функції  $F(x_1, x_2, \dots, x_N) = |A\bar{x} - \bar{b}|^2$ , або

$F(\bar{x}) = |A\bar{x} - \bar{b}|^2$ , де  $\bar{x}$  (коефіцієнти Фур'є) – це вектор  $(x_1, x_2, \dots, x_N)$ . Для знаходження мінімуму функції  $n$  – змінних, у випадку  $N = 20$ , оскільки ми беремо  $N = 2n$ ,  $n = 10$  гармонік, застосовувався метод Бройдена-

Флетчера-Гольдфарба-Шанно (БФГШ) [18–20].

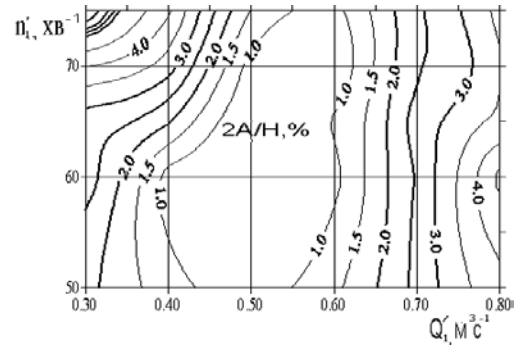


Рис. 2. Пульсації тиску в трубі турбіни РО230 з рівняння Бернуллі по МНК з вагами

Розрахунки методом БФГШ. Вони також проводилися для моделі гідротурбіни РО230 (рис. 3). Метод БФГШ заснований на формулі (1), тут апроксимується матриця Гессе, напрямком одновимірного пошуку  $d_k$  необхідно обчислювати шляхом вирішення СЛАР (2)

$$H_{k+1} = H_k + (p_k p_k^T) / (p_k^T s_k) - (H_k s_k (H_k s_k)^T) / ((H_k s_k)^T s_k), \quad (1)$$

де  $H_{k+1}$  – матриця,  $p_k, s_k$  – вектори,

$$H_k \cdot d_k = -g_k. \quad (2)$$

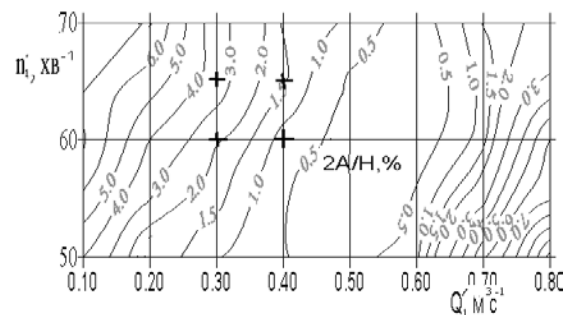


Рис. 3. Пульсації тиску в трубі турбіни РО230 з рівняння Бернуллі по методу БФГШ

Перша ітерація починається із заданої початкової точки  $x_0$ , і в напрямку антиградієнта виконується одновимірний пошук:

$$H_0 = E, d_0 = -g_0, H_k d_k = -g_k, \lambda_0 = \arg \min_{\lambda} f(x_0 + \lambda d_0), x_1 = x_0 + \lambda d_0. \quad (3)$$

Наступні ітерації проводяться з урахуванням формул (1) и (2):

$$p_{k-1} = g_k - g_{k-1}, s_{k-1} = x_k - x_{k-1}, \quad (4)$$

$$v_{k-1} = H_{k-1} - s_{k-1},$$

$$H_{k1} = H_{k-1} + \frac{p_{k-1} p_{k-1}^T}{p_{k-1}^T s_{k-1}} - \frac{v_{k-1} v_{k-1}^T}{v_{k-1}^T s_{k-1}}, \quad (5)$$

$$H_k d_k = -g_k, \lambda = \operatorname{argmin} f(x_k + \lambda_k d),$$

$$x_{k+1} = x_k + \lambda_k d_k. \quad (6)$$

Ітерації тривають до тих пір, поки виконується умова  $\|x_{k-1} - x_k\| > \xi$ .

За формулами (1)–(6) складемо алгоритм методу БФГШ.

Вхідні параметри:  $p_k$  – початкова точка пошуку,  $f(x)$  – процедура обчислення функції,  $\xi$  – допустима похибка

1. Обчислити  $g_x = \Delta f(x)$ , покласти  $d = -g_x$ ,  $H = E$ .
2. Обчислити  $r = \operatorname{argmin} f(x + \lambda d)$ ,  $s = rd$ .
3. Покласти  $x = x + s$ ,  $g_x = g_y$ .
4. Обчислити  $g_x = \Delta f(x)$ ,  $p = g_x - g_y$ ,  $v = Hs$ .
5. Покласти  $H = H + pp^T(p^T s) - vv^T(v^T s)$ .
6. Вирішити СЛАР  $H d = -g_x$ .
7. Якщо  $\|s\| > \xi$ , то перейти до кроку шагу 2.
8. Зупинитися.

Уточнення коефіцієнтів Фур'є було зроблено по методу БФГШ. З'явилася можливість порівняти результати методу БФГШ при розрахунках ПТ по рівнянню Бернуллі з експериментальними значеннями у полі універсальної характеристики.

На режимі  $Q'_1 = 0,3 \text{ м}^3 \cdot \text{с}^{-1}$  і  $n'_1 = 60 \text{ хв}^{-1}$  (рис. 3) БФГШ дає амплітуди ПТ – 2,25 %, експеримент – 2,55 %. При  $Q'_1 = 0,3 \text{ м}^3 \cdot \text{с}^{-1}$  і  $n'_1 = 65 \text{ хв}^{-1}$  маємо відповідно – 3,65 %, і 3,5 %. При  $Q'_1 = 0,4 \text{ м}^3 \cdot \text{с}^{-1}$  і обертах  $n'_1 = 60 \text{ хв}^{-1}$  маємо відповідно – 0,8 % і 1,3 %. При  $Q'_1 = 0,4 \text{ м}^3 \cdot \text{с}^{-1}$  і  $n'_1 = 65 \text{ хв}^{-1}$  маємо відповідно – 1,6 % і 1,4 %. Тобто метод БФГШ дає досить близькі до експерименту результати. Похибка при розрахунку амплітуд ПТ складає приблизно 15–20 % в порівнянні з експериментальними даними в широкому діапазоні режимів роботи гідротурбіни.

Алгоритм розрахунків джгутових ПТ у ВТ турбіни:

- підготовка даних для розрахунку: режимних і геометричних параметрів –  $Q'_{10}$ ,  $n'_{10}$ ,  $\Delta Q'_1$ ,  $\Delta n'_1$ ,  $R$ ,  $R_{2\text{вТ}}$ ,  $\bar{e}$ ,  $\beta_{\text{ж}}$ ,  $\bar{d}_{\text{ж}}$ , кроку, числа витків ВД та інших;

- визначення інтенсивності фізичних вихорів  $\Gamma_{2\text{вТ}}$  з рішення осесиметричної задачі на вихідній кромці лопаті. Обчислення компонент швидкостей фізичних вихорів;

- формування елементів матриці перевизначеної СЛАР для визначення коефіцієнтів  $x_k$  і  $x_{k+n}$ , які використовуються у функції напруженості вихрового шару  $\gamma(\alpha_2)$ . Формування нормальної системи рівнянь:  $\bar{A}Ax = \bar{A}b$ . Обчислення коефіцієнтів  $x_k$  і  $x_{k+n}$  з рішення перевизначеної СЛАР методом Гаусса. Обчислення функції  $\gamma(\alpha_2)$ ;

- обчислення компонент швидкостей від вихрової поверхні. Обчислення сумарних швидкостей від фізичних вихорів, вихрової поверхні й складових швидкості додаткового осесиметричного потоку через турбіну. Вибір екстремальних значень  $V_{\text{max}}$  і  $V_{\text{min}}$ ;

- розрахунок амплітуд ПТ з інтегралу Бернуллі. Обчислення частот обертання ВД і частот пульсації тиску. Побудова сумарної характеристики ПТ.

Програми для визначення ПТ складені на мові Фортран і в середовищі Mathcad. Одержані прогнози

пульсаційні характеристики для турбін РО115, РО230, РО310. Отриманий рівень ПТ є допустимим і гарантує надійну роботу гідротурбін.

**Висновки.** 1. Проведено порівняння методики розрахунку амплітуд джгутових ПТ в ВТ на основі рішення рівнянь Рейнольдса за допомогою програмного комплексу CFD з методикою кафедри «Гідравлічні машини» НТУ «ХПІ». У першому випадку для виконання задачі потрібні значні ресурси машинного часу, а похибка при розрахунку амплітуд ПТ становить до 10 % в порівнянні з експериментальними даними у широкому діапазоні режимів турбіни, у другому – 15–20 % при меншому часу розрахунків. Отриманий рівень джгутових ПТ є допустимим і гарантує надійну роботу гідротурбін турбіни.

2. Спрощена осесиметрична задача, яка використовувалася в методиці НТУ «ХПІ», дала можливість розраховувати інтенсивність ВД з урахуванням геометрії вихідної кромки лопаті через циркуляцію у втулкових перетинах РК. Проведене порівняння циркуляції, що була здобута на основі розрахунків, з циркуляцією, що була здобута із зондових випробувань, свідчить про задовільне їхнє узгодження.

3. Використання поліпшення нев'язки при розв'язанні СЛАР – метод БФГШ при знаходженні інтенсивності вихрової поверхні  $\gamma(\alpha_2)$ , що моделює стінку ВТ, дає розбіжність розрахованої пульсаційної характеристики з експериментальною приблизно 15–20 %, що допустимо у розрахунках на міцність елементів ПЧ гідротурбіни, але ще й тому, що маємо вагомий запас по коефіцієнтам міцності.

#### Список літератури

1. Cherny S., Chirkov D., Bannikov D., Lapin V., Skorospelov V., Eshkunova I., Avdushenko A. 3D numerical simulation of transient processes in hydraulic turbines. *25th IAHR Symposium on Hydraulic Machinery and Systems. IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. Vol. 12 (20–24 September 2010, Timișoara)*. Timișoara: Politehnica' University, 2010. doi: 10.1088/1755-1315/12/1/012071
2. Алексеенко С. В., Дектерев А. А., Литвинов И. В., Минаков А. В., Пылев И. М., Шандро А. И., Шторк С. И. Численное и экспериментальное моделирование течения в отсасывающей трубе гидротурбины. *Journal of Siberian Federal University. Engineering & Technologies*. 2011. Vol. 4 (5). P. 489–503.
3. Сентябов А. В., Гаврилов А. А., Дектерев А. А. Анализ RANS моделей турбулентности применительно к расчёту стационарного течения в отсасывающей трубе гидротурбины Turbine-99. *Вычислительная механика сплошных сред*. 2013. Т. 6, № 1. С. 86–93.
4. Gavrilov A., Dekterev A., Sentyabov A., Minakov A., Platonov D. Application of hybrid methods to calculations of vortex precession in swirling flows. *Notes on Numerical Fluid Mechanics*. 2012. Vol. 117. P. 449–459.
5. Платонов Д. В., Минаков А. В., Дектерев А. А., Сентябов А. В. Математическое моделирование нестационарных явлений в гидротурбине Саяно-Шушенской ГЭС. *Труды Академэнерго*. 2013. № 1. С. 73–84.
6. Авдющенко А. Ю., Черный С. Г., Чирков Д. В. Численный алгоритм моделирования пространственных течений несжимаемой жидкости на подвижных решетках. *Вычислительные технологии*. 2012. Т. 17, № 6. С. 3–25.
7. Миронов К. А., Олексенко Ю. Ю. Применение CFD при проектировании элементов проточной части гидротурбины. *Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Hydraulic machines and hydraulic units*. Kharkiv: NTU "KhPI". 2016. No. 20 (1192). P. 116–121.

8. Menter F. R. Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications. *AIAA Journal*. 1994. No. 8. P. 1598–1605.
9. Khare R., Prasad V., Kumar S. CFD approach for flow characteristics of hydraulic Francis turbine. *International Journal of Engineering Science and Technology*. 2010. Vol. 2 (8). P. 3824–3831.
10. Drankovskiy V. E., Rezvaya K. S., Krupa E. S. Calculating three-dimensional fluid flow in the spiral casing of the reversible hydraulic machine in turbine mode. *Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Hydraulic machines and hydraulic units*. Kharkiv: NTU "KhPI". 2016. No. 20 (1192). P. 53–57.
11. Григорьев В. Н. Определение пульсаций давления в отсасывающей трубе под действием вихря за рабочим колесом гидротурбины. *Энергомашиностроение*. 1989. № 9. С. 42–44.
12. Зав'ялов П. С. Математичне моделювання низькочастотних пульсацій тисків від декількох вихрових джгутів за робочими колесами гідротурбін і оборотних гідромашин. *Вісник Харківського державного політехнічного університету*. Харків: ХДПУ. 1997. С. 448–453.
13. Зав'ялов П. С., Кухтенков Ю. М., Подвойський Ю. А. Прогнозування пульсацій тисків від декількох вихрових джгутів за робочим колесом РО гідротурбіни. *Вісник Нац. техн. ун-та «ХПІ»*. Харків: НТУ «ХПІ». 2001. Вип. 129, ч.1. С. 95–104.
14. Зав'ялов П. С., Кухтенков Ю. М., Подвойський Ю. А. К методу расчета пульсационных характеристик от вихревых жгутов за рабочим колесом гидротурбины. *Проблемы машиностроения*. Харьков: НАНУ ИПМаш. 2003. № 2. С. 84–92.
15. Этинберг И. Э., Раухман Б. С. *Гидродинамика гидравлических турбин*. Ленинград: Машиностроение, 1978. 280 с.
16. Мышкис А. Д. *Математика для вузов*. Москва: Наука, 1971. 632 с.
17. Каханер Д., Моулер К., Неш С. *Численные методы и программное обеспечение*. Москва: Мир, 2001. 256 с.
18. Северин В. П. *Методы многомерной безусловной минимизации*. Харьков: НТУ «ХПИ», 2013. 160 с.
19. Северин В. П., Никулина Е. Н. *Методы одномерного поиска*. Харьков: НТУ «ХПИ», 2013. 124 с.
20. Банди Б. *Методы оптимизации*. Москва: Радио и связь, 1988. 127 с.
- gidroturbine Sayano-Shushenskoy GES [Mathematical modeling of non-stationary phenomena in the hydraulic turbine of the Sayano-Shushenskaya HES]. *Trudy Akademenergo*. 2013, no 1, pp. 73–84.
6. Avdyushchenko A. Yu., Chernyy S. G., Chirkov D. V. Chislennyi algoritm modelirovaniya prostranstvennykh techeniy neshzimaemoy zhidkosti na podvizhnykh reshetkakh [A numerical algorithm for modeling spatial incompressible fluid flows on movable grids]. *Vychislitel'nye tekhnologii*. 2012, vol. 17, no 6, pp. 3–25.
7. Mironov K. A., Oleksenko Yu. Yu. Primenenie CFD pri proektirovanii elementov protochnoy chasti gidroturbiny [Application of CFD in design elements flow space of hydroturbine]. *Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Hydraulic machines and hydraulic units*. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2016, no. 20 (1192), pp. 116–121.
8. Menter F. R. Two-Equation Eddy-Viscosity Turbulence Models for Engineering Applications. *AIAA Journal*. 1994, no. 8, pp. 1598–1605.
9. Khare R., Prasad V., Kumar S. CFD approach for flow characteristics of hydraulic Francis turbine. *International Journal of Engineering Science and Technology*. 2010, vol. 2 (8), pp. 3824–3831.
10. Drankovskiy V. E., Rezvaya K. S., Krupa E. S. Calculating three-dimensional fluid flow in the spiral casing of the reversible hydraulic machine in turbine mode. *Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Hydraulic machines and hydraulic units*. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2016, no. 20 (1192), pp. 53–57.
11. Grigoriev V. N. Opredelenie pulsatsiy davleniy v otsasyvayushey tube pod deystviem vikhrya za rabohimi kolesami gidroturbin [Determination of pressure pulsations in the draft tube under the action of a vortex behind the working wheel of a hydraulic turbine]. *Energomashinostroenie*. 1989, no. 9, pp. 42–44.
12. Zav'yalov P. S. Matematychnye modelyuvannya nyz'kochastotnykh pul'satsiy tyskviv vid dekil'kokh vykhrovykh dzhutiv za robochymy kolesamy hidroturbin i oborotnykh hidromashin [Mathematical modeling of low-frequency pressure pulsations from several vortex swirles behind the impellers of hydraulic turbines and rotating hydraulic machines]. *Visnyk Kharkivs'koho derzhavnoho politekhnichnoho universytetu* [Bulletin of the Kharkiv State Polytechnical University]. Kharkiv, KhDPU Publ., 1997, pp. 448–453.
13. Zav'yalov P. S., Kukhtenkov Yu. M., Podvoys'kiy Yu. A. Prohnozuvannya pul'satsiy tyskviv vid dekil'kokh vykhrovykh dzhutiv za robochym kolesom RO hidroturbiny [Prediction of pressure pulsations from several vortex swirles behind the impeller RO of the hydraulic turbine]. *Visnyk Nats. tekhn. un-ta "KhPI"* [Bulletin of the National Technical University "KhPI"]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2001, issue 129, part 1, pp. 95–104.
14. Zav'yalov P. S., Kukhtenkov Yu. M., Podvoys'kiy Yu. A. K методу расчета пульсационных характеристик от вихревых жгутов за рабочим колесом гидротурбины [To the method of calculating the pulsation characteristics from vortex swirles behind the impeller of a hydraulic turbine]. *Problemi mashinostroeniya*. Kharkov, NANU IPMash Publ., 2003, no. 2, pp. 84–92.
15. Etinger I. E., Raikhman B. S. *Gidrodinamika gidravlicheskikh turbin* [Hydrodynamics of hydraulic turbines]. Leningrad, Mashinostroenie Publ., 1978. 280 p.
16. Myshkis A. D. *Matematika dlya vtuzov* [Mathematics for technical colleges]. Moscow, Nauka Publ., 1971. 632 p.
17. Kakhner D., Mouler K., Nesh S. *Chislennyye metody i programnoye obespechenie* [Numerical methods and software]. Moscow, Mir Publ., 2001. 256 p.
18. Severin V. P. *Metody mnogomernoy bezuslovnoy minimizatsii* [Multivariate unconstrained minimization methods]. Kharkov, NTU "KhPI" Publ., 2013. 160 p.
19. Severin V. P., Nikulina E. N. *Metody odnomernogo poiska* [One-dimensional search methods]. Kharkov, NTU "KhPI" Publ., 2013. 124 p.
20. Bandi B. *Metody optimizatsii* [Optimization methods]. Moscow, Radio i svyaz' Publ., 1988. 127 p.

## References (transliterated)

1. Cherny S., Chirkov D., Bannikov D., Lapin V., Skorospelov V., Eshkunova I., Avdushenko A. 3D numerical simulation of transient processes in hydraulic turbines. *25th IAHR Symposium on Hydraulic Machinery and Systems. IOP Conference Series: Earth and Environmental Science. Vol. 12 (20–24 September 2010, Timișoara)*. Timișoara, Politehnica' University Publ., 2010. doi: 10.1088/1755-1315/12/1/012071
2. Alekseenko S. V., Dekterev A. A., Litvinov I. V., Minakov A. V., Pylev I. M., Shandro A. I., Shtork S. I. Chislennoe i eksperimental'noe modelirovanie techeniya v otsasyvayushey tube gidroturbiny [Numerical and Experimental Modeling of the Flow in the Suction Pipe of a Hydraulic Turbine]. *Journal of Siberian Federal University. Engineering & Technologies*. 2011, vol. 4 (5), pp. 489–503.
3. Sentyabov A. V., Gavrilov A. A., Dekterev A. A. Analiz RANS modeley turbulentsi primenitel'no k raschetu statsionarnogo techeniya v otsasyvayushey tube gidroturbiny Turbine-99 [RANS analysis of turbulence models as applied to the calculation of a steady flow in the draft tube of a Turbine-99 turbine]. *Vychislitel'naya mekhanika sploshnykh sred*. 2013, vol. 6, no 1, pp. 86–93.
4. Gavrilov A., Dekterev A., Sentyabov A., Minakov A., Platonov D. Application of hybrid methods to calculations of vortex precession in swirling flows. *Notes on Numerical Fluid Mechanics*. 2012, vol. 117, pp. 449–459.
5. Platonov D. V., Minakov A. V., Dekterev A. A., Sentyabov A. V. Matematicheskoe modelirovanie nestatsionarnykh yavleniy v

Надійшло (received) 24.10.2020

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

**Кухтенков Юрій Михайлович (Кухтенков Юрий Михайлович, Kukhtenkov Yuriy)** – кандидат технічних наук, доцент, Національний технічний університет «Харківський політехнічний інститут», доцент кафедри «Гідравлічні машини ім. Г. Ф. Проскура»; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-9210-7486>; e-mail: [kuhtenkov.um@gmail.com](mailto:kuhtenkov.um@gmail.com)