

В. И. ГНЕСИН, Л. В. КОЛОДЯЖНАЯ, R. RZADKOWSKI

ЧИСЛЕННЫЙ АНАЛИЗ АЭРОУПРУГИХ КОЛЕБАНИЙ ЛОПАТОЧНОГО ВЕНЦА ТУРБОМАШИНЫ С УЧЕТОМ ДЕФОРМАЦИИ ДИСКА

Нестационарные явления, вызванные колебаниями лопаток под действием возмущающих сил, характеризуются обменом энергией между потоком газа и колеблющимися лопатками и составляют основу физического механизма самовозбуждающихся колебаний, которые могут или затухать (аэродемпфирование), или проявляться в устойчивой форме автоколебаний, или в неустойчивой форме флаттера, который может привести к разрушению конструкции. Поэтому аэроупругое поведение лопаток представляет важную проблему надежности и безопасности газо- и паротурбинных двигателей с высокими аэродинамическими показателями и соответственно высоко нагруженными лопатками. Одним из подходов к повышению устойчивости колебаний лопаток является расстройка собственных форм, связанная с деформацией диска. Представлен численный анализ влияния деформации диска на аэроупругие колебания лопаток рабочего колеса турбомашин. Деформация диска характеризуется количеством узловых диаметров, что определяет межлопаточный угол сдвига по фазе колебаний соседних лопаток (МЛФУ), который влияет на нестационарные аэродинамические нагрузки и амплитуды колебаний лопаток. В работе показано, что уменьшение межлопаточного угла сдвига по фазе колебаний лопаток приводит к повышению аэроупругой устойчивости, т. е. к снижению амплитуд колебаний лопаток. Предложенный численный метод решения связанной аэроупругой задачи в трехмерном транзвуковом потоке идеального газа позволяет прогнозировать аэроупругое поведение лопаток, включая вынужденные, самовозбуждающиеся колебания и автоколебания с целью повышения экономичности и надежности лопаточных аппаратов турбомашин.

Ключевые слова: лопаточный венец, собственная форма лопатки, межлопаточный угол сдвига по фазе, идеальный газ, аэроупругие колебания лопаток, турбомашин.

V. I. GNESIN, L. V. KOLODYAZHNAYA, R. RZADKOWSKI

ЧИСЕЛЬНИЙ АНАЛІЗ АЕРОПРУЖНИХ КОЛИВАНЬ ЛОПАТКОВОГО ВІНЦЯ ТУРБОМАШИНИ З УРАХУВАННЯМ ДЕФОРМАЦІЇ ДИСКУ

Нестационарні явища, викликані коливаннями лопаток під дією сил, що обурюють, характеризуються обміном енергією між потоком газу і коливними лопатками і складають основу фізичного механізму самозбудних коливань, які можуть або затухати (аеродемпфування), або проявлятися в стійкій формі автоколивань, або в нестійкій формі флатера, який може привести до руйнування конструкції. Тому аеропружна поведінка лопаток являє важливу проблему надійності і безпеки газо- і паротурбінних двигунів з високими аеродинамічними показниками і відповідно високо навантаженими лопатками. Одним з підходів до підвищення стійкості коливань лопаток є розлад власних форм, пов'язаний з деформацією диска. Представлено чисельний аналіз впливу деформації диска на аеропружні коливання лопаток робочого колеса турбомашини. Деформація диска характеризується кількістю вузлових діаметрів, що визначає міжлопатковий кут зсуву по фазі коливань сусідніх лопаток (МЛФК), який впливає на нестационарні аеродинамічні навантаження і амплітуди коливань лопаток. В роботі показано, що зменшення міжлопаткового кута зсуву по фазі коливань лопаток призводить до підвищення аеропружної стійкості, тобто до зниження амплітуд коливань лопаток. Запропонований чисельний метод розв'язання зв'язаної аеропружної задачі в тривимірному транзвуковому потоці ідеального газу дозволяє прогнозувати аеропружну поведінку лопаток, включаючи вимушені, самозбудні коливання і автоколивання з метою підвищення економічності і надійності лопаток апаратів турбомашин.

Ключові слова: лопатковий вінець, власна форма лопатки, міжлопатковий кут зсуву по фазі, ідеальний газ, аеропружні коливання лопаток, турбомашин.

V. GNESIN, L. KOLODYAZHNAYA, R. RZADKOWSKI

NUMERICAL ANALYSIS OF THE TURBOMACHINE BLADE ROW AEROELASTIC OSCILLATIONS WITH TAKING INTO ACCOUNT THE DISC DEFORMATION

The unsteady phenomena caused by blades oscillations by action of forced forces are characterized with energy change between gas flow and oscillating blades and formulate the base of physical mechanism of self-excited oscillations that can or to attenuate (aerodamping), or to be displayed in stable form of autooscillations, or in unstable form of flutter, which can activate to the structure destruction. Therefore aeroelastic blades behaviour represents the important problem of reliability and safety of gas and steam turbines with high aerodynamic indicators and high loaded blades. One of approaches to increase the stable blades oscillations is detuning of natural forms bound to disc deformation. There presented the numerical analysis of effect of disc deformation on aeroelastic blades oscillations of turbomachine blade row. The disc deformation is characterized by disc nodal diameters number that defines the interblade phase angle of blades oscillations shift (IBPA), and impacts on unsteady aerodynamic loads and blades oscillations amplitudes. In paper there shown that decrease of IBPA causes to increase of aeroelastic stability that is to reduction of blades oscillations amplitudes. The proposed numerical method of coupled aeroelastic problem solution for threedimensional transonic ideal gas flow allows to predict aeroelastic behaviour of blades including the forced, self-excitation oscillations and autooscillations with purpose to increase the efficiency and reliability of turbomachines blades devices.

Keywords: blade row, the natural form of blade, interblade phase angle, the ideal flow, aeroelastic blades oscillations, turbomachine.

Введение. Конструкции лопаточных аппаратов турбомашин (турбин, компрессоров, авиационных двигателей) подвергаются большим динамическим нестационарным нагрузкам. Обеспечение надежности и безопасности лопаточного аппарата турбомашин в нестационарном потоке является сложной и актуальной проблемой, решению различных вопросов которой посвящен ряд работ [1–9], в которых

рассматриваются особенности взаимодействия нестационарного газодинамического потока в турбинах и компрессорах с колеблющимися лопатками.

Требование высокой надежности и безопасности турбомашин приводит к необходимости разработки новых совершенных моделей, которые учитывают реальные физические свойства потока газа и

© В. И. Гнесин, Л. В. Колодяжная, R. Rzadkowski, 2019

конструкции лопаточных аппаратов.

Аэроупругие явления в турбомашинах характеризуются обменом энергией между потоком газа и колеблющимися лопатками и составляют основу физического механизма самовозбуждающихся колебаний, которые могут либо затухать (аэродемпфирование), либо проявляться в устойчивой форме автоколебаний, либо в неустойчивой форме флаттера, который может привести к разрушению конструкции.

Одним из подходов к повышению устойчивости колебаний лопаток является оценка влияния расстройки собственных форм лопаток и межлопаточного угла сдвига по фазе колебаний лопаток, зависящих от деформации диска, т. е. количества узловых диаметров, на величину нестационарных нагрузок и амплитуды колебаний лопаток.

В статье представлен численный анализ нестационарных аэродинамических нагрузок и аэроупругого поведения лопаток рабочего колеса турбомшины в 3-х мерном потоке идеального газа через лопаточный венец с учетом колеблющихся лопаток и расстройки собственных форм, вызванных деформацией диска.

Численный метод основан на решении связанной задачи нестационарной аэродинамики и упругих колебаний лопаток с учетом собственных форм и межлопаточного угла сдвига по фазе, вызванных наличием узловых диаметров диска. Уравнения аэродинамики и динамики интегрируются одновременно с обменом информацией на каждом временном шаге [1, 2, 4–10].

Предложенный метод решения связанной аэроупругой задачи позволяет прогнозировать амплитудно-частотный спектр колебаний лопаток в зависимости от количества узловых диаметров диска с целью повышения надежности лопаточных аппаратов турбомашин.

Цель работы. Целью настоящей работы является численное исследование влияния расстройки собственных форм и межлопаточного угла сдвига по фазе колебаний лопаток (МЛФУ) вследствие деформации диска на нестационарные нагрузки и амплитуды колебаний лопаток на основе разработанного численного метода решения связанной задачи нестационарной газодинамики и упругих колебаний лопаток.

Постановка задачи. Рассматривается трехмерный поток идеального газа через вращающийся лопаточный венец последней ступени осевой турбины с колеблющимися лопатками под действием переменных аэродинамических нагрузок. Лопаточный венец представляет собой кольцевую решетку, состоящую из 53 лопаток.

Трехмерное нестационарное течение газа описывается полной системой нестационарных уравнений Эйлера, представленных в интегральной форме законов сохранения во вращающейся с постоянной угловой скоростью декартовой системе координат [2, 11–13]. Учитывая неперiodичность

потока в окружном направлении из-за колебаний лопаток, расчетная область включает полную дугу окружности ($z = 53$ межлопаточных канала).

Разностная сетка разбивается на сегменты, каждый из которых включает одну лопатку и имеет протяженность в окружном направлении, равную шагу венца. Каждый из сегментов дискретизируется с использованием гибридной Н–Н разностной сетки (рис. 1).

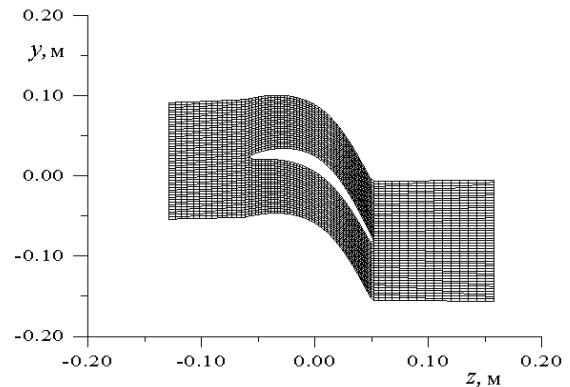


Рис. 1. Дифференциальная разностная сетка в тангенциальном среднем сечении

Постановка граничных условий основана на одномерной теории характеристик [2, 14–18]. Предполагая, что осевая скорость во входном и выходном сечениях является дозвуковой, граничные условия задаются в следующем виде:

- на входе – давление и температура заторможенного потока, меридиональный и тангенциальный углы потока;
- на выходе – статическое давление за лопаточным венцом;
- на твердых стенках – условие скольжения.

Граничные условия дополняются соотношениями на характеристиках во входном и выходном сечениях расчетной области.

Для численного интегрирования уравнений Эйлера применяется разностная схема Годунова-Колгана 2-го порядка точности по координатам и времени, обобщенная на случай произвольной пространственной деформируемой разностной сетки [12, 13].

Динамическая модель колеблющейся лопатки описывается с использованием модального подхода [2, 3–9].

Алгоритм решения аэроупругой связанной задачи основан на последовательном по времени интегрировании уравнений газодинамики и уравнений колебаний лопаток с обменом информацией на каждой итерации [19, 20].

Численный анализ. Численное исследование проведено для лопаточного венца последней ступени осевой турбины мощностью 370 МВт в трехмерном потоке идеального газа с учетом деформации диска и расстройки собственных форм колебаний лопаток для 3-х вариантов.

Для каждого из 3-х вариантов приняты следующие граничные условия (рис. 2):

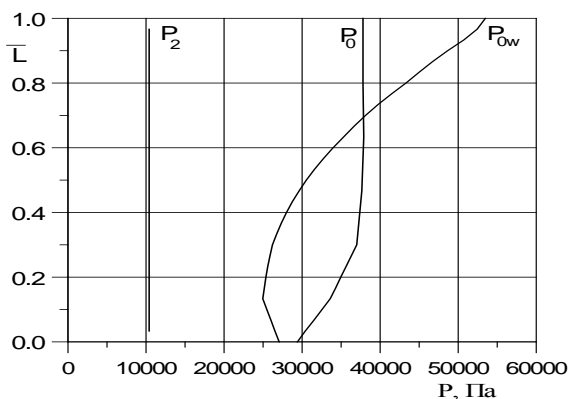


Рис. 2. Распределение полного и статического давления по радиусу венца

- полное давление в абсолютной системе координат на входе $P_0 = 29400\text{--}37800$ Па;
- полная температура в абсолютной системе координат на входе $T_0 = 348$ К;
- углы потока на входе в статор в тангенциальной (α) и меридиональной (γ) плоскостях заданы;
- статическое давление на выходе за венцом $P_2 = 10400$ Па;
- число оборотов ротора $n = 3000$ об/мин.

Варианты 1, 2 и 3 отличаются количеством узловых диаметров (УД) и собственными формами.

Межлопаточный фазовый угол сдвига по фазе колебаний лопаток (МЛФУ) определяется количеством узловых диаметров

$$\text{МЛФУ} = 360^\circ \times \frac{\text{УД}}{z}$$

Для варианта 1 количество узловых диаметров равно $\text{УД} = 13$, $\text{МЛФУ} = 88,3^\circ$, для варианта 2 количество узловых диаметров равно $\text{УД} = 26$, $\text{МЛФУ} = 176,6^\circ$, для варианта 3 количество узловых диаметров равно $\text{УД} = 40$, $\text{МЛФУ} = 271,7^\circ$.

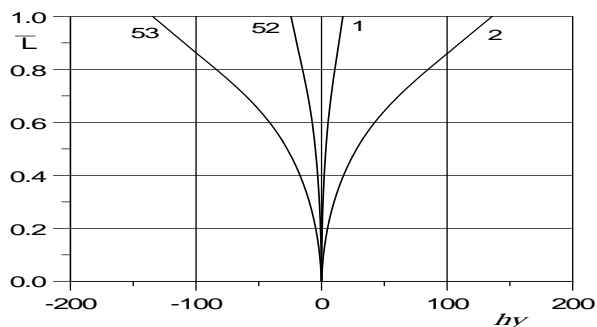
В расчете учитывалась 1-я собственная форма колебаний с частотой $\nu = 110$ Гц. Собственные формы для каждой лопатки заданы в зависимости от числа узловых диаметров. На рис. 3 показаны перемещения центров тяжести периферийного сечения лопаток 1, 2, 52, 53 в окружном направлении для каждого из 3-х вариантов.

На 1-м этапе выполнены аэродинамические расчеты потока газа через вращающийся лопаточный венец при заданном законе гармонических колебаний с постоянным МЛФУ для каждого из вариантов:

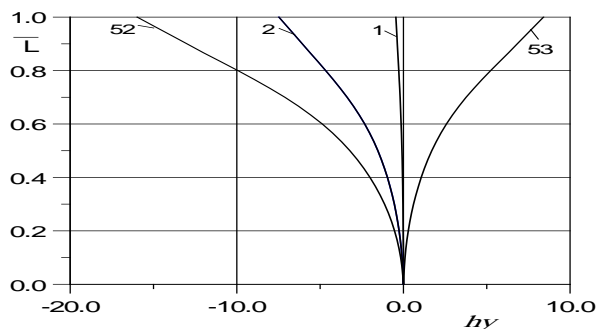
$$q_j = q_0 \sin[2\pi\nu t + (j-1) \cdot \delta], \quad (1)$$

- где q_j – модальный коэффициент;
- j – номер лопатки;
- q_0 – амплитуда колебаний;
- ν – частота собственной формы колебаний;
- δ – МЛФУ соседних лопаток.

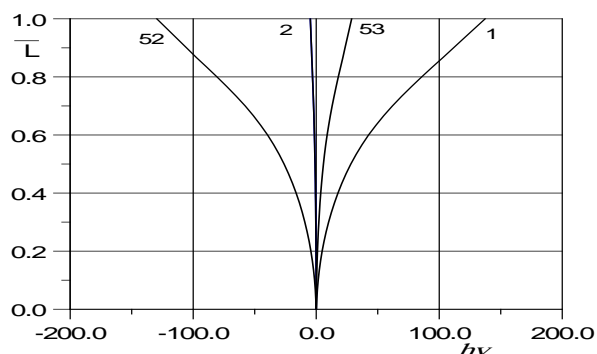
На рис. 4 показаны изменения модальных коэффициентов 4-х лопаток (1, 2, 52, 53) в течение одного периода гармонических колебаний для 3-х вариантов.



а



б



в

Рис. 3. Перемещение центра тяжести периферийного сечения лопатки в окружном направлении по 1-й собственной форме:

а – 1-й вариант; б – 2-й вариант; в – 3-й вариант

Перемещение лопатки определяется модальным коэффициентом и собственной формой.

$$u(x, y, z, t) = U(x, y, z) \cdot q(t), \quad (2)$$

где $U(x, y, z)$ – вектор перемещения лопатки по собственной форме;

$q(t)$ – модальный коэффициент.

Аэроупругая устойчивость системы «поток газа – лопаточный венец» определяется аэродинамическим коэффициентом аэродемпфирования D , равным взятому со знаком «минус» коэффициенту работы W , совершаемой нестационарной аэродинамической нагрузкой, действующей на лопатку за один период колебаний. Знак «минус» работы W ($D > 0$) соответствует аэродемпфированию, знак «плюс» ($D < 0$) – самовозбуждению.

Изменение коэффициента аэродемпфирования D по высоте 1-й лопатки для 3-х вариантов приведено на

рис. 5. Как видно из графиков, максимальное (среднее по высоте лопатки) значение коэффициента аэродемпфирования, т. е. аэроупругая устойчивость, соответствует МЛФУ = 88,3° (вариант 1).

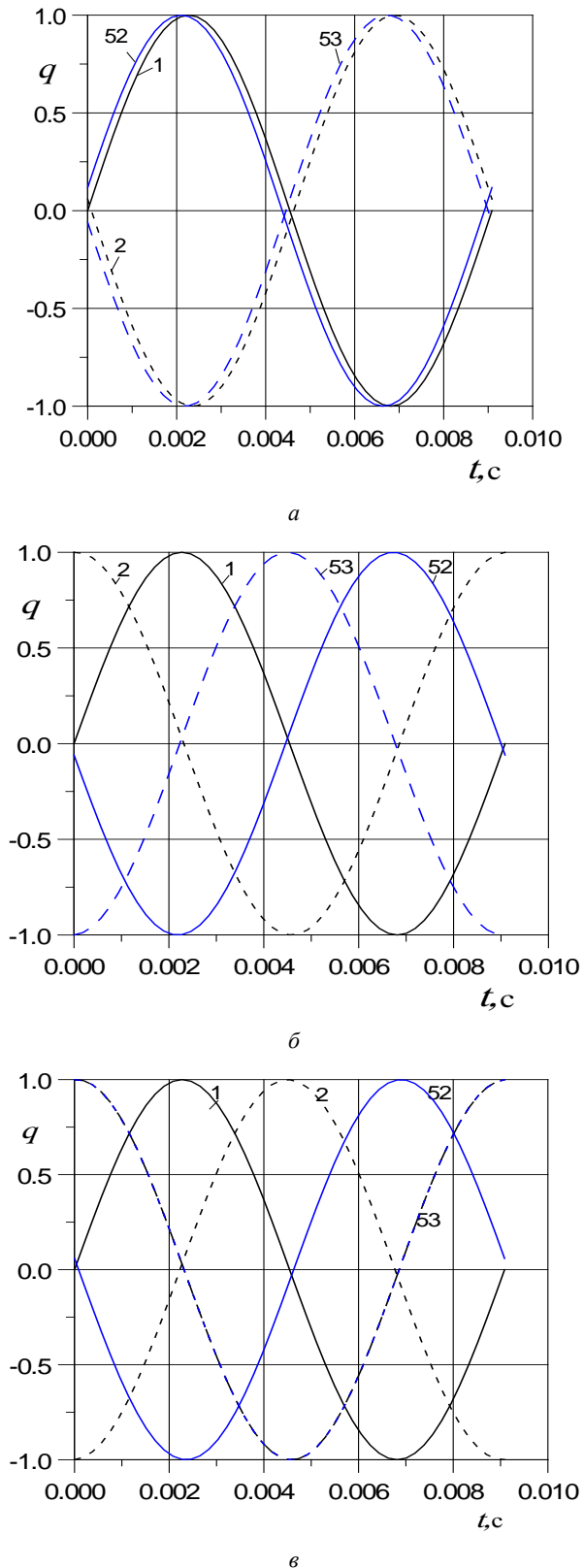


Рис. 4. Изменение модального коэффициента для расстроенных рабочих лопаток:
а – вариант 1; б – вариант 2; в – вариант 3

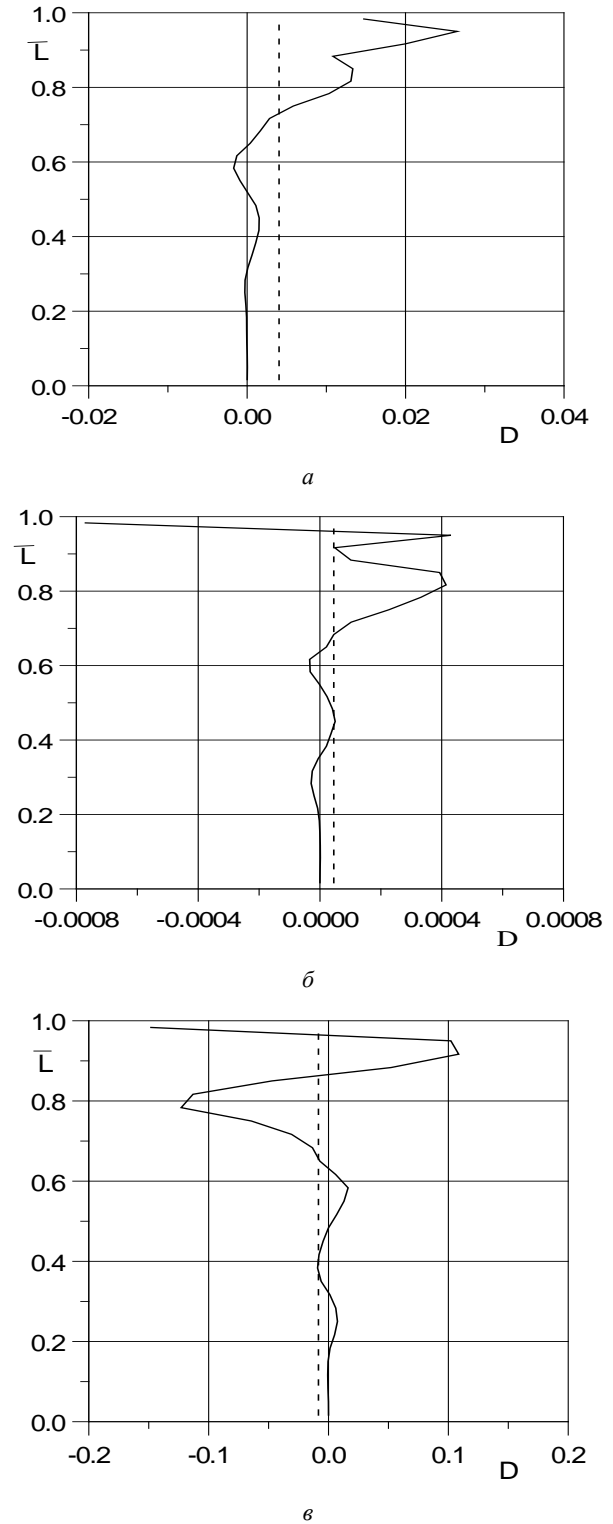


Рис. 5. Изменение коэффициента аэродемпфирования по высоте лопатки:
а – вариант 1; б – вариант 2; в – вариант 3

Начиная с некоторого момента времени, движение лопаток определяется нестационарными аэродинамическими нагрузками, действующими на лопатки, и деформацией лопаток (связанные аэроупругие колебания). Расчеты связанных аэроупругих колебаний выполнены в течение 10 периодов колебаний (~4,5 оборотов ротора).

Модальная сила, соответствующая перемещению лопатки по собственной форме, рассчитывается на каждой итерации в соответствии с распределением давления p по поверхности лопатки σ

$$\lambda_i = \frac{\iint p \bar{U} \cdot \bar{n}^\circ d\sigma}{\iiint_v \rho \bar{U}^2 dV} \quad (3)$$

Перемещение лопатки определяется по формуле 2, а модальный коэффициент $q(t)$ определяется из решения дифференциального уравнения

$$\ddot{q}_i(t) + 2h_i \dot{q}_i(t) + \omega_i^2 q_i(t) = \lambda_i(t), \quad (4)$$

где h – коэффициент механического демпфирования; ν – частота 1-й собственной формы колебаний.

На рис. 6, 7 приведены графики перемещения центра тяжести периферийного сечения 1-й лопатки в окружном направлении h_y (вариант 1 – рис. 6, а, вариант 2 – рис. 6, в, вариант 3 – рис. 6, д), осевом направлении h_z (вариант 1 – рис. 7, а, вариант 2 – рис. 7, в, вариант 3 – рис. 7, д) в течение десяти периодов связанных колебаний и их амплитудно-частотные спектры.

Как следует из графиков, основной вклад в колебания лопаток вносит гармоника с частотой близкой к частоте собственной формы колебаний (~110 Гц). Из расчета следует, что все колебания демпфируются.

На рис. 8, 9 представлены графики нестационарных аэродинамических сил, действующих на периферийный слой рабочих лопаток ротора в окружном направлении F_y и осевом направлении F_z и их амплитудно-частотные спектры для трех вариантов МЛФУ и собственных форм колебаний лопаток.

Основной вклад в аэродинамические нагрузки вносят низкочастотные гармоники, вызванные колебаниями лопаток по 1-й собственной форме.

Выводы. Проведен численный анализ влияния расстройки собственных форм и межлопаточного угла сдвига по фазе колебаний лопаток на нестационарные нагрузки и амплитуды колебаний лопаток на основе метода расчета связанной задачи нестационарной газодинамики и упругих колебаний лопаток для двух вариантов.

Первый вариант с 13 узловыми диаметрами и МЛФУ = 88,3 характеризуется более высоким значением коэффициента аэродемпфирования и, следовательно, более высокой аэроупругой устойчивостью.

Основной вклад в колебания лопаток вносят колебания с частотой близкой к частоте 1-й собственной формы.

Основной вклад в нестационарные аэродинамические нагрузки вносят низкочастотные колебания расстроенных лопаток.

Предложенный метод решения связанной задачи аэроупругости позволяет прогнозировать режимы колебаний лопаток и нестационарные нагрузки с целью повышения надежности лопаточных аппаратов турбомашин.

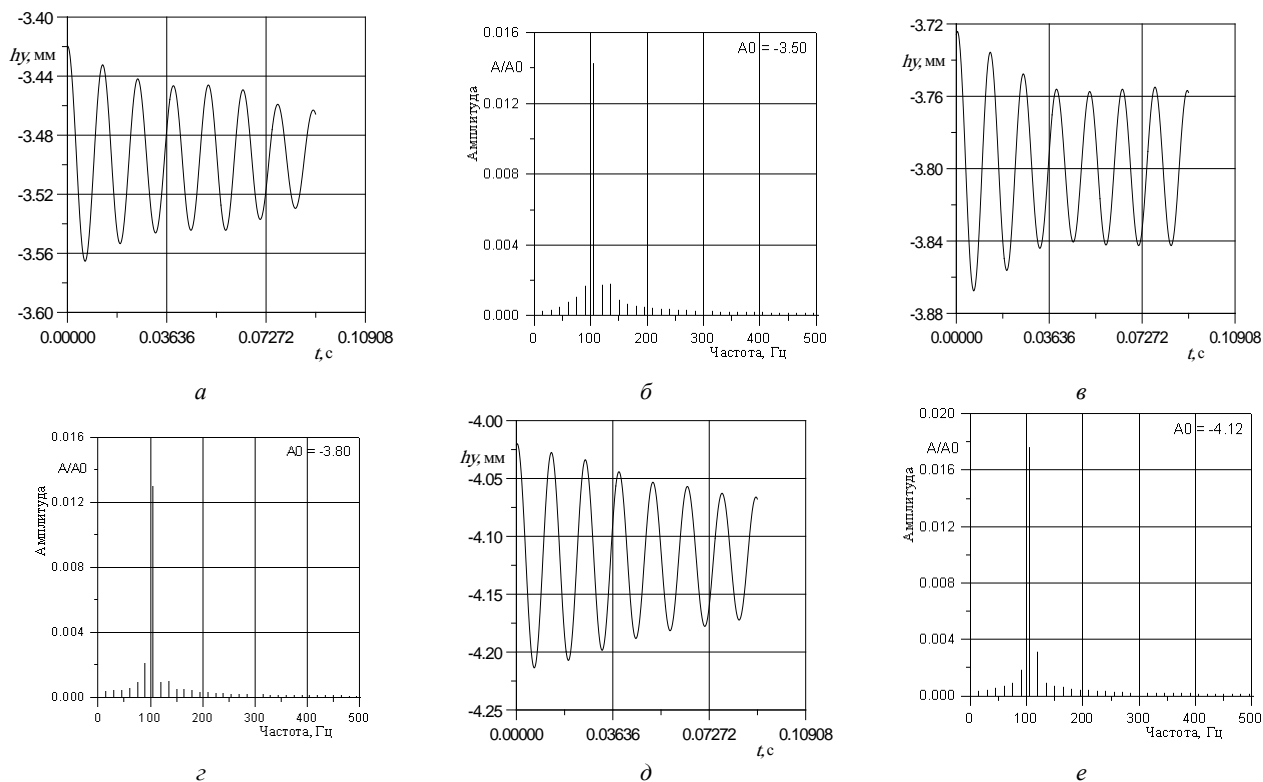


Рис. 6. Перемещение периферийного сечения рабочей лопатки ротора в окружном направлении: а, б – 1-й вариант; в, г – 2-й вариант; д, е – 3-й вариант

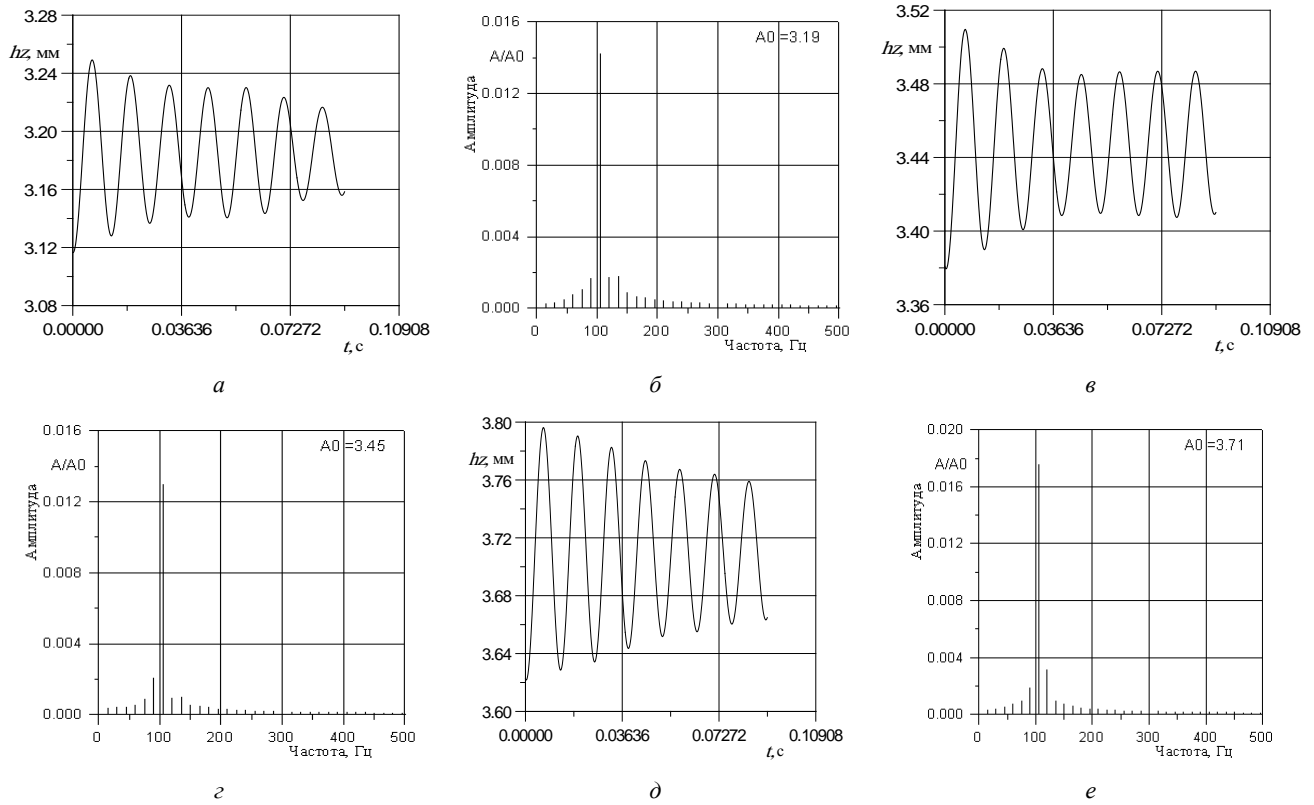


Рис. 7. Перемещение периферийного сечения рабочей лопатки ротора в осевом направлении:
a, б – 1-й вариант; *г, д* – 2-й вариант; *е, ж* – 3-й вариант

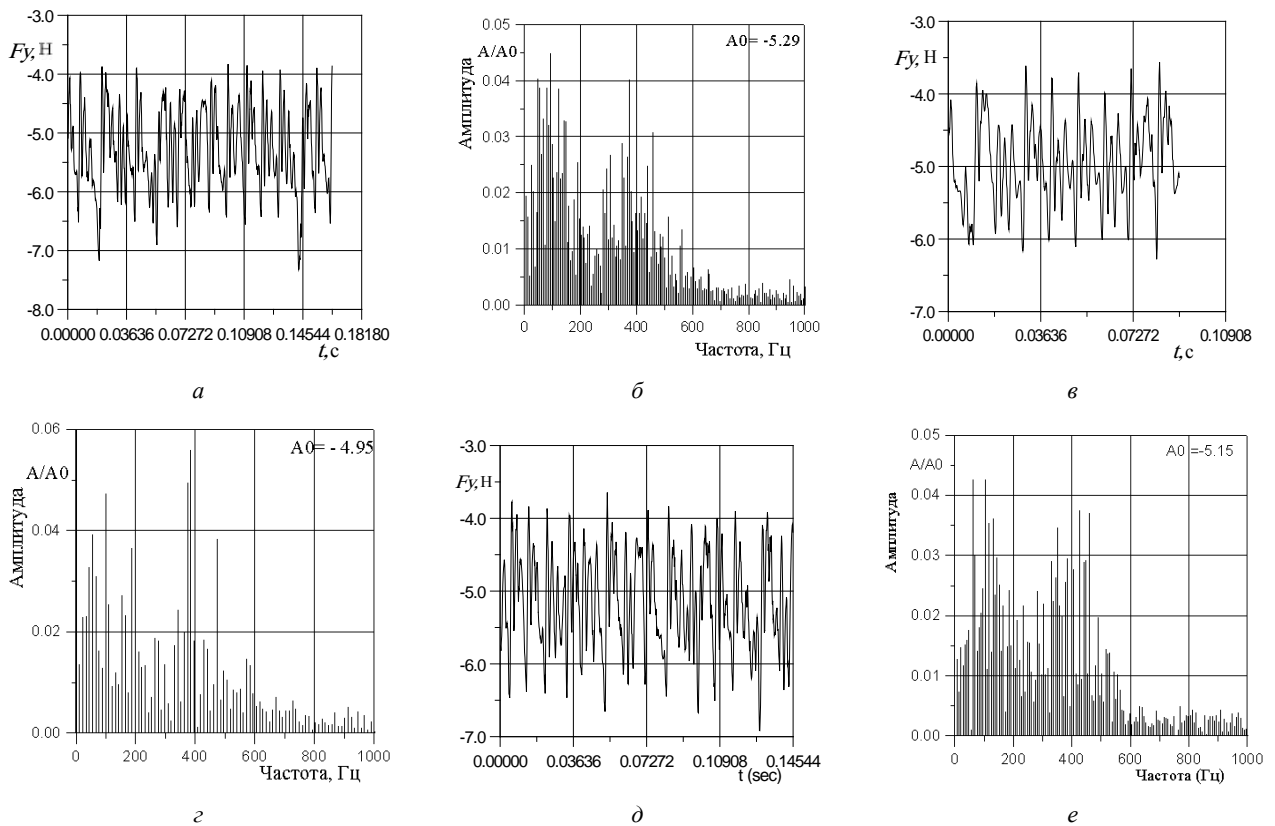


Рис. 8. Изменение нестационарной аэродинамической силы, действующей на периферийный слой лопатки ротора в окружном направлении:
a, б – 1-й вариант; *г, д* – 2-й вариант; *е, ж* – 3-й вариант

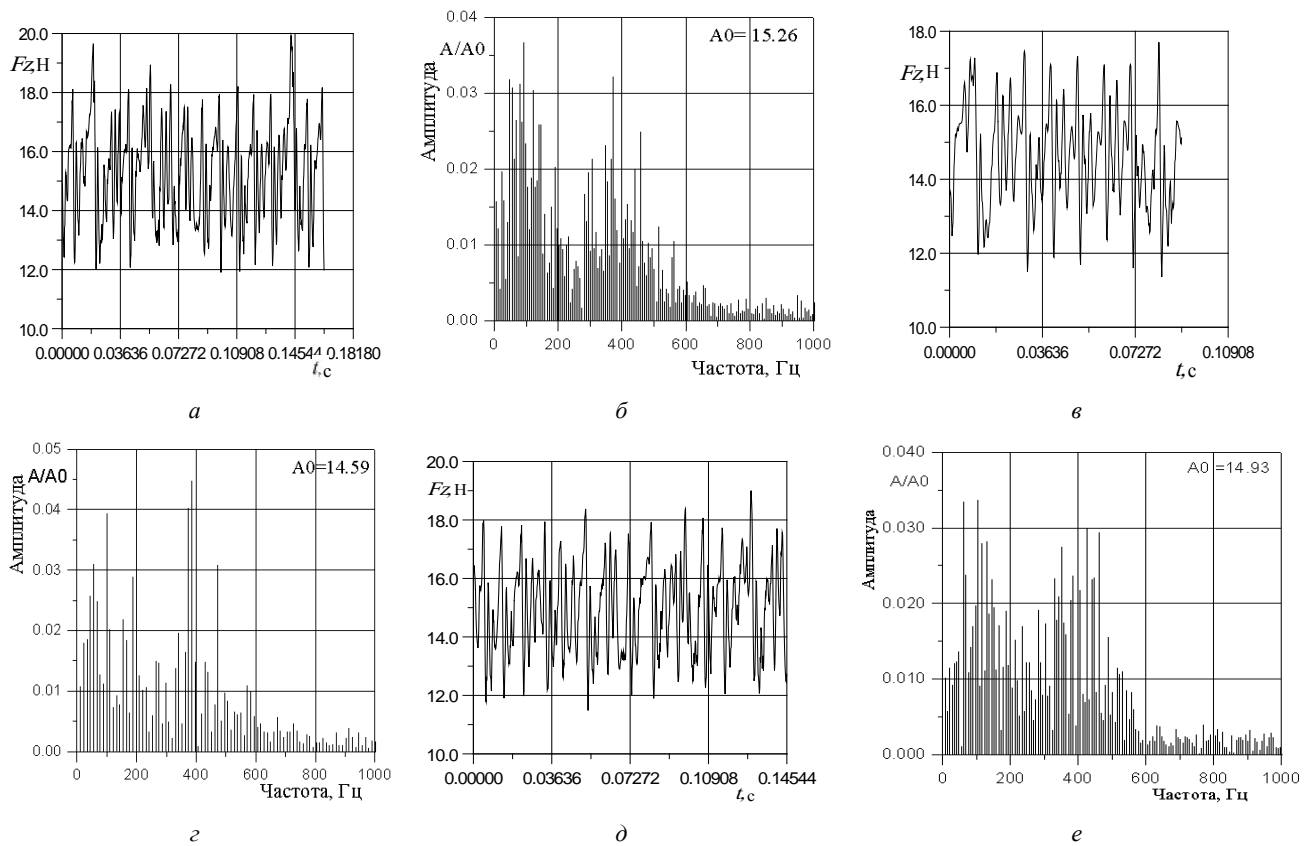


Рис. 9. Изменение нестационарной аэродинамической силы, действующей на периферийный слой лопатки ротора в осевом направлении:
а, б – 1-й вариант; в, г – 2-й вариант; д, е – 3-й вариант

Список литературы

- Гнесин В. И., Колодяжная Л. В. Аэроупругие явления в турбомашинах. *Аэрогидродинамика и аэроакустика: проблемы и перспективы: сб. науч. тр.* Харьков: Нац. аэрокосмический ун-т «ХАИ». 2009. № 3. С. 53–62.
- Cinnella P., Palma De, Pascasio G., Napolitano M. A Numerical Method for Turbomachinery Aeroelasticity. *Journal of Turbomachinery*. 2004. Vol. 126. P. 310–316.
- Rządkowski R., Soliński M., Szczepanik R. The unsteady low-frequency aerodynamic forces acting on the rotor blade in the first stage of an jet engine axial compressor. *Advances in vibration engineering*. 2012. Vol. 11, no. 2. P. 193–204.
- Soliński M., Rządkowski R., Szczepanik R., Drewczyński M. The unsteady low-frequency forces acting on the rotor blade in the first stage on an axial compressor of SO-3 jet engine. *Journal of Vibration Engineering and Technologies*. 2014. Vol. 2, no. 4. P. 385–393.
- Tanuma T., Okuda H., Hashimoto G., Yamamoto S., Skubukawa N., Okunao K., Saeki H., Tsukunda T. Aerodynamic and Structural Numerical Investigation of Unsteady Flow Effects on Last Stage Blades. *Proc. of ASME Turbo Expo 2015. Vol. 8: Microturbines, Turbochargers and Small Turbomachines; Steam Turbines (15–19 June 2015, Montreal, Quebec, Canada)*. P. GT2015-43848. doi: 10.1115/GT2015-43848
- Petrie-Repar P., Fuhrer C., Grübel M., Vogt D. Two-Dimensional Steam Turbine Flutter Test Case. *Proc. of the 14th International Symposium on Unsteady Aerodynamics, Aeroacoustics & Aeroelasticity of Turbomachines (8–11 September 2015, Stockholm, Sweden)*. Stockholm: ISUAAAT14 Organizing Committee, 2015. P. 33–43.
- Petrie-Repar P., Makhnov V., Shabrov N., Smirnov E. Analysis of a Long Shrouded Steam Turbine. *Proc. of ASME Turbo Expo 2014. Vol. 7B: Structures and Dynamics (16–20 June 2014, Düsseldorf, Germany)*. P. GT2014-26874. doi: 10.1115/GT2014-26874
- Zhou B., Mujezinovic A., Coleman A., Ning W., Ansari A. Forced Response Prediction for Steam Turbine Last Stage Blade Subject to Low Engine Order Excitation. *Proc. of ASME Turbo Expo 2011. Vol. 7: Turbomachinery (6–10 June 2011, Vancouver, British Columbia, Canada)*. P. GT2011-46856. doi: 10.1115/GT2011-46856
- Wang Wei-Ze, Xuan Fu-Zhen, Zhu Kui-Long, Tu Shan-Tung. Failure Analysis of the Final Stage Blade in Steam Turbine. *Engineering Failure Analysis*. 2007. Vol. 14. P. 632–641. doi: 10.1016/j.engfailanal.2006.03.004
- Liu F., Cai J., Zhu Y., Wong A. S. F., Tsai H. M. Calculation of wing flutter by a coupled fluid-structure method. *Journal of Aircraft*. 2001. Vol. 38 (2). P. 334–342.
- Huang X. Q., He L., Bell D. L. Influence of Upstream Stator on Rotor Flutter Stability in a Low Pressure Steam Turbine Stage. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part A: Journal of Power and Energy*. 2006. Vol. 220, issue 1. P. 25–35.
- Годунов С. К., Забродин А. В., Иванов М. Я., Крайко А. Н., Прокопов Г. П. *Численное решение многомерных задач газовой динамики*. Москва: Наука, 1976. 400 с.
- Гнесин В. И., Колодяжная Л. В., Жандковски Р. Численный анализ трёхмерного нестационарного потока идеального газа в последней ступени турбомшины с учётом неосесимметричного выхлопного патрубка. *Вісник Нац. техн. ун-та «ХПІ». Сер.: Енергетичні і меллотехнічні процеси і устаткування*. Харків: НТУ «ХПІ», 2016. № 8 (1180). С. 47–53. doi: 10.20998/2078-774X.2016.08.06
- Moynard F., Cosme N., Jöcker M., Fransson T. H., Lornagex D., Jacquet-Richardet G. A fluid-structure interfacing technique for computational aeroelastic simulations. *Proc. of the 9th International Symposium on Unsteady Aerodynamics, Aeroacoustics & Aeroelasticity of Turbomachines (4–8 September 2000, Lyon, France)*. Lyon: ISUAAAT 9, 2000. P. 11.
- Dowell E. H., Howard C., Curtiss Jr., Scanlan H. Robert, Sisto Ferrando. *A modern course in aeroelasticity*. Netherlands: Kluwer Academic Publ., 1989. 555 p.
- Sanvito M., Pesatori E., Bachschmidt N., Chatterton S. Analysis of

- LP steam turbine blade vibration: experimental results and numerical simulations. *10th Int. Conf. on Vibrations in Rotating Machinery (11–13 September 2012, London)*. London: IMechE, 2012. P. 189–197.
17. McNamara J. J., Friedmann P. P., Powell K. G., Bartels R. E., Thruthimattam B. J. Aeroelastic and Aerothermoelastic Behavior in Hypersonic Flow. *Journal AIAA*. 2008. Vol. 46, no. 10. P. 2591–2610.
 18. Bolcs A., Fransson T. Aeroelasticity in turbomachines. Comparison of theoretical and experimental cascade results. *Communication du Laboratoire de Thermique Appliquée et de Turbomachines*. 1986. No. 13. 174 p.
 19. Gnesin V. I., Kolodyazhnaya L. V. Numerical Modelling of Aeroelastic Behaviour for Oscillating Turbine Blade Row in 3D Transonic Ideal Flow. *Journal Problems in Mash. Eng.* 1999. Vol. 1, no. 2. P. 65–76.
 20. Höhn W. Numerical investigation of blade flutter at or near stall in axial turbomachines. *Doctoral Thesis, Royal Institute of Technology, S-10044*. Stockholm, 2000. 180 p.
- References (transliterated)**
1. Gnesin V. I., Kolodyazhnaya L. V. Aeroprugie yavleniya v turbomashinakh [The aeroelastic phenomena in the turbomachines]. *Aerogidrodinamika i aeroakustika: problemy i perspektivy: sb. nauch. tr.* [Aerohydrodynamics and aeroacoustics: problems and prospects: a collection of scientific papers]. Kharkov, Nats. aerokosmicheskiiy un-t "KhAI" Publ., 2009, no. 3, pp. 53–62.
 2. Cinnella P., Palma De, Pascasio G., Napolitano M. A Numerical Method for Turbomachinery Aeroelasticity. *Journal of Turbomachinery*. 2004, vol. 126, pp. 310–316.
 3. Rządkowski R., Soliński M., Szczepanik R. The unsteady low-frequency aerodynamic forces acting on the rotor blade in the first stage of an jet engine axial compressor. *Advances in vibration engineering*. 2012, vol. 11, no. 2, pp. 193–204.
 4. Soliński M., Rządkowski R., Szczepanik R., Drewczyński M. The unsteady low-frequency forces acting on the rotor blade in the first stage on an axial compressor of SO-3 jet engine. *Journal of Vibration Engineering and Technologies*. 2014, vol. 2, no. 4, pp. 385–393.
 5. Tanuma T., Okuda H., Hashimoto G., Yamamoto S., Skubukawa N., Okunao K., Saeki H., Tsukunda T. Aerodynamic and Structural Numerical Investigation of Unsteady Flow Effects on Last Stage Blades. *Proc. of ASME Turbo Expo 2015. Vol. 8: Microturbines, Turbochargers and Small Turbomachines; Steam Turbines (15–19 June 2015, Montreal, Quebec, Canada)*. P. GT2015-43848. doi: 10.1115/GT2015-43848
 6. Petrie-Repar P., Fuhrer C., Grübel M., Vogt D. Two-Dimensional Steam Turbine Flutter Test Case. *Proc. of the 14th International Symposium on Unsteady Aerodynamics, Aeroacoustics & Aeroelasticity of Turbomachines (8–11 September 2015, Stockholm, Sweden)*. Stockholm, ISUAAAT14 Organizing Committee Publ., 2015, pp. 33–43.
 7. Petrie-Repar P., Makhnov V., Shabrov N., Smirnov E. Analysis of a Long Shrouded Steam Turbine. *Proc. of ASME Turbo Expo 2014. Vol. 7B: Structures and Dynamics (16–20 June 2014, Düsseldorf, Germany)*. P. GT2014-26874. doi: 10.1115/GT2014-26874
 8. Zhou B., Mujezinovic A., Coleman A., Ning W., Ansari A. Forced Response Prediction for Steam Turbine Last Stage Blade Subject to Low Engine Order Excitation. *Proc. of ASME Turbo Expo 2011. Vol. 7: Turbomachinery (6–10 June 2011, Vancouver, British Columbia, Canada)*. P. GT2011-46856. doi: 10.1115/GT2011-46856
 9. Wang Wei-Ze, Xuan Fu-Zhen, Zhu Kui-Long, Tu Shan-Tung. Failure Analysis of the Final Stage Blade in Steam Turbine. *Engineering Failure Analysis*. 2007, vol. 14, pp. 632–641. doi: 10.1016/j.engfailanal.2006.03.004
 10. Liu F., Cai J., Zhu Y., Wong A. S. F., Tsai H. M. Calculation of wing flutter by a coupled fluid-structure method. *Journal of Aircraft*. 2001, vol. 38 (2), pp. 334–342.
 11. Huang X. Q., He L., Bell D. L. Influence of Upstream Stator on Rotor Flutter Stability in a Low Pressure Steam Turbine Stage. *Proceedings of the Institution of Mechanical Engineers, Part A: Journal of Power and Energy*. 2006, vol. 220, issue 1, pp. 25–35.
 12. Godunov S. K., Zabrodin A. V., Ivanov M. Ya., Krayko A. N., Prokopov G. P. *Chislennoe reshenie mnogomernykh zadach gazovoy dinamiki* [Numerical solution of multidimensional problems of gas dynamics]. Moscow, Nauka Publ., 1976. 400 p.
 13. Gnesin V. I., Kolodyazhnaya L. V., Zhandkovski R. Chislenny analiz trekhmernogo nestatsionarnogo potoka ideal'nogo gaza v posledney stupeni turbomashiny s uchetom neosesimmetrichnogo vykhlopnogo patrubka [Numerical Analysis of the Three-Dimensional Nonstationary Flow of Ideal Gas in the Last Stage of Turbine Machine Taking into Consideration the Nonaxisymmetric Exhaust Pipe Branch]. *Visnyk Nats. tekhn. un-ta "KhPI". Seriya: Enerhetychni i teplotekhnichni protsesy i ustatkuvannya* [Bulletin of the National Technical University "KhPI". Series: Energy and heat engineering processes and equipment]. Kharkiv, NTU "KhPI" Publ., 2016, no. 8 (1180), pp. 47–53. doi: 10.20998/2078-774X.2016.08.06
 14. Moyroud F., Cosme N., Jöcker M., Fransson T. H., Lornagex D., Jacquet-Richardet G. A fluid-structure interfacing technique for computational aeroelastic simulations. *Proc. of the 9th International Symposium on Unsteady Aerodynamics, Aeroacoustics & Aeroelasticity of Turbomachines (4–8 September 2000, Lyon, France)*. Lyon, ISUAAAT 9 Publ., 2000, p. 11.
 15. Dowell E. H., Howard C., Curtiss Jr., Scanlan H. Robert, Sisto Ferrando. *A modern course in aeroelasticity*. Netherlands, Kluwer Academic Publ., 1989. 555 p.
 16. Sanvito M., Pesatori E., Bachschmidt N., Chatterton S. Analysis of LP steam turbine blade vibration: experimental results and numerical simulations. *10th Int. Conf. on Vibrations in Rotating Machinery (11–13 September 2012, London)*. London, ImechE Publ., 2012, pp. 189–197.
 17. McNamara J. J., Friedmann P. P., Powell K. G., Bartels R. E., Thruthimattam B. J. Aeroelastic and Aerothermoelastic Behavior in Hypersonic Flow. *Journal AIAA*. 2008. Vol. 46, no. 10, pp. 2591–2610.
 18. Bolcs A., Fransson T. Aeroelasticity in turbomachines. Comparison of theoretical and experimental cascade results. *Communication du Laboratoire de Thermique Appliquée et de Turbomachines*. 1986, no. 13, 174 p.
 19. Gnesin V. I., Kolodyazhnaya L. V. Numerical Modelling of Aeroelastic Behaviour for Oscillating Turbine Blade Row in 3D Transonic Ideal Flow. *Journal Problems in Mash. Eng.* 1999, vol. 1, no. 2, pp. 65–76.
 20. Höhn W. Numerical investigation of blade flutter at or near stall in axial turbomachines. *Doctoral Thesis, Royal Institute of Technology, S-10044*. Stockholm, 2000. 180 p.

Поступила (received) 08.08.2019

Відомості про авторів / Сведения об авторах / About the Authors

Гнесін Віталій Ісаєвич (Гнесин Виталий Исаевич, Gnesin Vitaly) – доктор технічних наук, професор, ІПМаш ім. А. М. Підгорного НАН України, головний науковий співробітник відділу гідроаеромеханіки енергетичних машин; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-6411-6158>; e-mail: gnesin@ipmach.kharkov.ua

Колодяжна Любов Володимирівна (Колодяжная Любовь Владимировна, Kolodyazhnaya Lyubov) – доктор технічних наук, старший науковий співробітник, ІПМаш ім. А. М. Підгорного НАН України, провідний науковий співробітник відділу гідроаеромеханіки енергетичних машин; м. Харків, Україна; ORCID: <https://orcid.org/0000-0001-5469-4325>; e-mail: lyubovvladimirovna60@gmail.com

Rzadkowski Romuald – Doctor of Technical Sciences, Professor, The Institute flow machines PAN, Head of Department of Dynamics and Aeroelasticity; Gdansk, Poland; ORCID: <https://orcid.org/0000-0002-0560-1222>; e-mail: z3@imp.gda.pl